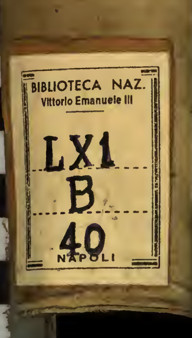
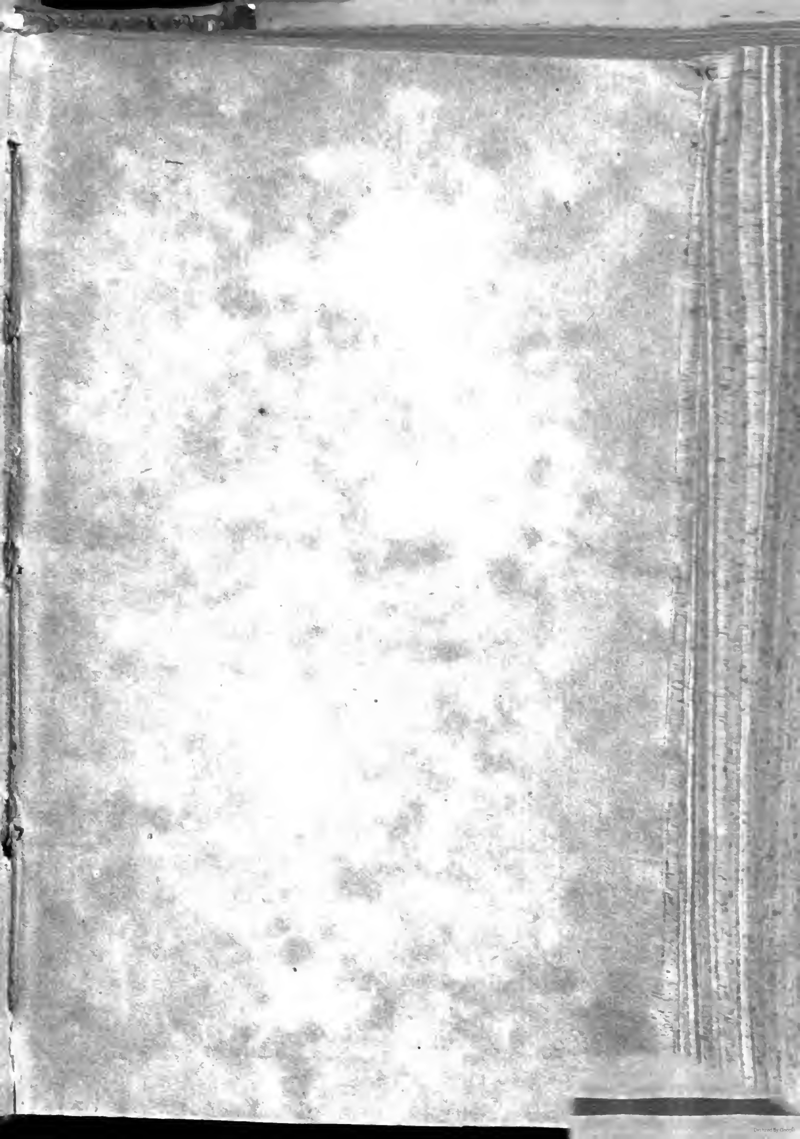
MEMOIRES
d'Academie
Sciences.
1750.







SUITE DES MEMOIRES DE MATHEMATIQUE ET DE PHYSIQUE,

Tirez des Regiſtres

DE L'ACADEMIE ROYALE DES SCIENCES,

DE L'ANNÉE M. DCCXXX.





A AMSTERDAM,

Chez PIERRE MORTIER.

M. DCCXXXIII.

Avec Privilege de N. S. les Etats de Hollande & de West-Friſe.



SUITE DES MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE DES SCIENCES,

De l'Année M. DCCXXX.

LA COURBE DESCENSUS ÆQUABILIS DANS UN MILIEU RESISTANT COMME UNE PUISSANCE QUELCONQUE DE LA VITESSE.

Par M. de Maupertuis. *

I. En 1687 M. Leibnitz, à l'occasion de sa dispute avec M. l'Abbé Catelan sur les Forces vives, proposa à ses adversaires, de trouver la Courbe dans laquelle un corps tombant par la seule force de la pesanteur, s'approche également de l'horizon dans des tems égaux. Par-là il leur faisoit voir que puisqu'on peut règler d'une maniere arbitraire le rapport entre les chûtes d'un corps & les tems qu'il employe à ces chûtes, la consideration des tems, qui étoit la seule ressource des adversaires des Forces vives, ne devoit en aucune maniere entrer dans l'estimation de ces Forces. M. Leibnitz vouloit aussi fai-

* 29 Novemb. 1730.

re comprendre à M. l'Abbé Catelan que l'Analyſede Deſcartes ou l'Algebre ordinaire n'étoit pas ſuffiſante, comme il le prétendoit, pour réſoudre toutes ſortes de Problêmes.

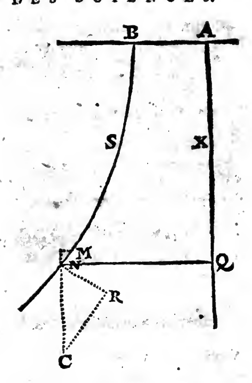
Ce Problême, qui ne fut point réſolu par ceux à qui il étoit propoſé, reçut en 1694 * differentes Solutions des plus célébres Géometres. Au-lieu de prendre l'horizon pour terme des approches du corps, on prit un point quelconque; & Mrs. Bernoulli diſtinguerent leurs Solutions par les élégantes conſtructions qu'ils donnerent de la Courbe *Deſcenſus æquabilis*. Enfin M. Varignon en 1699 † donna au Problême une eſpece de généralité, en ne l'aſtreignant ni à l'hypotheſe de Galilée ſur les vîteſſes, ni au rapport d'égalité entre les chûtes & les tems.

Juſqu'ici tout s'eſt paſſé dans le Vuide, & nous n'avons aucune Solution du Problême dans un Milieu réſiſtant. On voit aſſez que cette circonſtance doit changer extrêmement la nature de la Courbe *Deſcenſ. æquab.* En effet cette Courbe, qui eſt la ſeconde parabole cubique dans le cas propoſé par M. Leibnitz, c'eſt-à-dire, dans le cas où le corps dans le vuide doit s'approcher de l'horizon proportionnellement aux tems, cette Courbe, dis-je, dans un milieu réſiſtant, comme une puiſſance quelconque de la vîteſſe, devient tranſcendente du ſecond degré.

II. Comme l'hypotheſe particuliere d'une réſiſtance proportionnelle au quarré de la vîteſſe donne un moyen de trouver cette Cour- be

* *Vide Acta Lipſ.* 1694.

† *V. les Mem. de l'Ac.* 1699 & 1703.



be qui ne feroit pas applicable aux autres hypothefes, je commencerai par chercher la Courbe dans cette hypothefe : je donnerai enfuite toutes les Courbes *Defcenf. æquab.* pour quelque hypothefe de réfiftance que ce foit.

Soit la courbe que l'on cherche, $BN = s$, $AQ = x$, $QN = y$; la force de la pefanteur $= p$; la vîteffe du corps dans quelque point N de la courbe $= v$.

Le corps tombant dans la courbe BN, fa force accélératrice dépend de deux caufes; l'une eft la force de la pefanteur, l'autre la réfiftance du milieu. Pour trouver ce que la pefanteur y contribue, ayant pris la conftan-

te NC pour p, je la décompose en deux autres forces, l'une NR perpendiculaire, l'autre RC parallele à la courbe; il est clair que cette derniere seule accélere le corps; ainsi $\frac{pdx}{ds}$ est la force accélératrice produite par la pesanteur.

Mais la résistance du milieu s'oppose à cette force, & en doit détruire une partie; or cette résistance étant proportionnelle au quarré de la vîtesse, si l'on prend $\frac{1}{n}$ pour son intensité, l'on aura pour la force retardatrice du corps $\frac{vv}{n}$; & pour la force accélératrice actuelle produite par les deux causes $\frac{pdx}{ds} - \frac{vv}{n}$. Or la force accélératrice, multipliée par le tems, donne la difference de la vîtesse; l'on a donc ici $\left(\frac{pdx}{ds} - \frac{vv}{n}\right) ds = vdv$, ou $npdx = vvds + nvdv$.

III. Pour avoir v dans cette équation, je la multiplie par c^{fs} (c étant le nombre dont le logarithme est l'unité, & f un coëfficient que je vais déterminer) j'ai donc $npc^{fx}dx = vvc^{fs}ds + nc^{fs}vdv$, dont l'intégrale est $\int npc^{fs}dx = \frac{1}{f}vvc^{fs} - \frac{2}{f}\int c^{fs}vdv + n\int c^{fs}vdv$. Je cherche maintenant la valeur

leur de f propre à faire évanouïr les deux derniers termes, & je trouve $f = \frac{2}{n}$; l'intégrale de l'équation est donc $npfc^{\frac{2s}{n}} dx = \frac{n}{2} vvc^{\frac{2s}{n}}$, & $vv = \frac{2p}{c^{\frac{2s}{n}}} \int c^{\frac{2s}{n}} dx$.

IV. Maintenant puisque dans la courbe que l'on cherche, les descentes verticales doivent être proportionnelles aux tems, l'on a $\frac{ds}{v}$ proportionnel à dx ; ou prenant q pour une arbitraire constante $\frac{ds^2}{vv} = \frac{dx^2}{qq}$. Substituant dans cette équation l'expression de la vîtesse, l'on a $\frac{ds^2}{2pc^{-\frac{2s}{n}} \int c^{\frac{2s}{n}} dx} = \frac{dx^2}{qq}$ ou $\frac{c^{-\frac{2s}{n}} ds^2}{2pdx^2} = \frac{1}{qq} \int c^{\frac{2s}{n}} dx$. Differentiant cette équation, elle devient $qqdxds^3 + nqqdxdsdds - nqqds^2ddx = npdx^4$, qui est l'équation de la courbe *Descens. æquabilis*

V. Cette équation n'est pas intégrable; cependant on peut construire la courbe par les Quadratures, comme l'on va voir.

Dans l'équation $qqdxds^3 + nqqdxdsdds - nqqds^2ddx = npdx^4$, l'on n'a ſuppoſé aucune des differentielles conſtante; ſi donc on fait $ddx = 0$, l'on aura $qqds^3 + nqqdsdds = npdx^3$, ou $qq(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}} + nqqdyddy = npdx^3$.

Si maintenant l'on fait $dy = \frac{zdx}{q}$, $ddy = \frac{dzdx}{q}$; ces valeurs ſubſtituées dans l'équation, l'on aura $\frac{dx}{q}(qq + zz)^{\frac{3}{2}} + nzdz = npdx$. D'où l'on tire $dx = \frac{nzdz}{np - \frac{1}{q}(qq + zz)^{\frac{3}{2}}}$.

Conſtruiſant donc la courbe * DF, dont l'abſciſſe $DE = z$, & l'ordonnée $FE = \frac{qnz}{np - \frac{1}{q}(qq + zz)^{\frac{3}{2}}}$, l'on aura $x =$ l'aire $\frac{DFE}{q}$.

Faiſant enſuite une ſeconde courbe DH, dont l'abſciſſe $DI =$ l'aire $\frac{DFE}{q}$, & l'ordonnée $HI = z =$ l'abſciſſe DE de la premiere, l'on aura $y =$ l'aire $\frac{DHI}{q}$. Ainſi l'on aura les deux coordonnées de la courbe que l'on cherche.

On peut remarquer que la premiere courbe DF eſt quarrable par logarithmes; car ſi l'on

* Voy. la Fig. page 340.

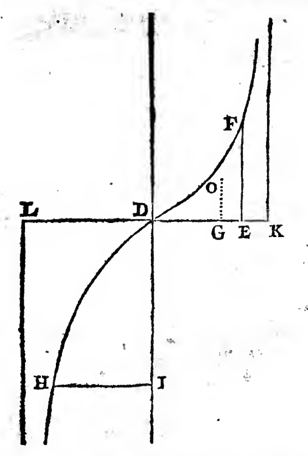
l'on fait $qq + zz = tt$, l'on change la premiere expreſſion $\frac{qnzdz}{np - \frac{1}{q}(qq + zz)^{\frac{3}{2}}}$, en

$\frac{qqntdt}{npq - t^3}$ qui eſt intégrable par logarith.

Ayant communiqué cette ſolution, & cette conſtruction de la Courbe à M. Bernoulli, il m'envoya une maniere de perfectionner la conſtruction, qui eſt digne de ſon illuſtre Auteur; je vais la rapporter ici, extraite de ſa Lettre, ſur la permiſſion qu'il m'en a donnée.

„ Soit O le centre de gravité de l'aire
„ DFE, d'où l'on abaiſſe la perpendiculai-
„ re OG: par la nature de ce centre, on a
„ $DHI = \frac{DFE.\,DG}{q}$; donc $y = \frac{DHI}{q}$
„ $= \frac{DFE\,DG}{qq} = \frac{x.\,DG}{q}$, c'eſt pourquoi
„ l'on peut ſe paſſer de l'aire DHI; car ſup-
„ poſant la ſouſcentrique DG donnée dans
„ l'aire donnée DFE, on trouve la valeur de
„ y, en faiſant $q : DG :: x : \frac{x.\,DG}{q} = y$; or
„ dans la pratique il eſt fort aiſé de connoi-
„ tre la ſouſcentrique des figures, en met-
„ tant la figure DFE en ſituation horizon-
„ tale ſur le tranchant d'un plan vertical pa-
„ rallele FE, que l'on avance ou recule d'un
„ mouvement toujours parallele juſqu'à ce
„ que la figure DFE ſoit en équilibre; cela
„ fait, la partie DG emportée par le tran-
„ chant ſera la ſouſcentrique.

 Voi-



Voici la démonſtration de la conſtruction de M. Bernoulli. L'on a par la nature du centre de gravité $DG = \frac{1}{x} \int z\,dx$; c'eſt-à-dire (à cauſe de $x = \frac{DFE}{q}$ & de $y = \frac{DHI}{q}$) $DG = \frac{q}{DFE}\, DHI$; Donc $DHI = \frac{DG.\,DFE}{q}$ & $y = \frac{DG.\,DFE}{qq} = \frac{x.\,DG}{q}$.

VII.

VII. Voilà le Problême résolu pour un milieu résistant, comme le quarré de la vîtesse: cette hypothese, outre qu'elle est assez conforme à la nature, a encore pour le calcul cet avantage particulier, qu'on peut trouver en termes finis l'expression de la vîtesse, ce qui n'arrive pas dans les autres hypotheses de résistance proportionnelle à quelque autre puissance de la vîtesse.

VIII. On peut cependant par une autre méthode se passer de l'expression de la vîtesse, & résoudre le Problême en général, pour un milieu qui résisteroit comme une puissance quelconque de la vîtesse.

En suivant les mêmes raisonnemens qui ont conduit à l'équation $\left(\frac{pdx}{ds} - \frac{vv}{n}\right) ds = vdv$, on trouvera dans l'hypothese d'une résistance proportionnelle à une puissance quelconque de la vîtesse $\left(\frac{pdx}{ds} - \frac{v^e}{n^{e-1}}\right) ds = vdv$.

L'on a de plus par la proprieté de la courbe $\frac{ds}{v} = \frac{dx}{q}$; l'on a par cette derniere équation v & $dv = \frac{qds}{dx}$ & $\frac{qdxdds - qdsddx}{dx^2}$; ces valeurs substituées dans la premiere, donnent pour l'équation de la courbe *Descens. æquab.* $\frac{pn^{e-1}dx^{e+1} - q^e ds^{e+1}}{n^{e-1}} = dx^{e-3}$ $(qqdxdsdds - qqds^2ddx)$.

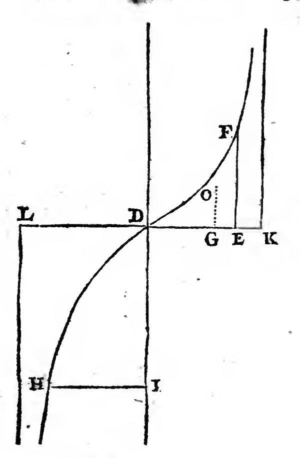
Si

Si l'on fait dx conſtant, cette équation devient $pn^{e-1}\, dx^{e+1} - q^e\, ds^{e+1} = n^{e-1}\, qq\, dx^{e-2}\, ds\, dds$; ou $pn^{e-1}\, dx^{e+1} - q^e\, (dx^2 + dy^2)^{\frac{e+1}{2}} = n^{e-1}\, qq\, dx^{e-2}\, dy\, ddy$, qui eſt l'équation de toutes les courbes *Deſcenſ. æquab.* pour telle hypotheſe de réſiſtance que l'on voudra.

IX. Toutes ces courbes ſont conſtruiſibles par les quadratures; car faiſant $dy = \frac{z\,dx}{q}$ $ddx = \frac{dz\,dx}{q}$, & ſubſtituant ces valeurs dans la derniere équation, il vient $pn^{e-1}\, dx^{e+1} - q^e \left(dx^2 + \frac{zz}{qq}\, dx^e\right)^{\frac{e+1}{2}} = n^{e-1}\, dx^e.\, zdz$. D'où l'on tire $dx = \frac{n^{e-1}\, zdz}{pn^{e-1} - \frac{1}{q}(qq+zz)^{\frac{e+1}{2}}}$.

Conſtruiſant donc la courbe DF dont l'abſciſſe $DE = z$, & l'ordonnnée $FE = \frac{qn^{e-1}\, z}{pn^{e-1} - \frac{1}{q}(qq+zz)^{\frac{e+1}{2}}}$, l'on aura $x =$ l'aire $\frac{DFE}{q}$.

Faiſant enſuite la courbe DH, dont l'abſciſſe



ſciſſe DI=l'aire $\frac{DFE}{q}$, l'ordonnée HI=l'abſciſſe DE de la premiere, l'on aura y=l'aire $\frac{DHI}{q}$, l'on a donc ainſi les deux coordonnées de la courbe *Deſcenſ. æquab.*

X. Ayant l'aire DFE de la premiere courbe, l'on pourra ſe paſſer de la ſeconde par la conſidération du centre de gravité, com-

me l'on a vu dans la solution particuliere: car, ayant $x = \frac{DFE}{q}$, l'on aura toujours $y = \frac{x.\ DG}{q}$.

XI. Si on suppose $n = \infty$, c'est-à-dire, que la résistance du milieu soit nulle, l'équation générale $pn^{e-1} dx^{e+1} - q^e (dx^2 + dy^2)^{\frac{e+1}{2}} = n^{e-1} qq dx^{e-2} dy ddy$, se réduira à $pdx^3 = qq dy ddy$, ou $pxdx^2 + padx^2 = \frac{qq}{2} dy^2$; ou $dy = \frac{dx}{q} \sqrt{(2pa + 2px)}$, ou enfin $y = \frac{2\sqrt{2}}{3pq}(pa + px)^{\frac{3}{2}} + b$.

D'où l'on voit que dans le cas d'une résistance nulle, ou dans le vuide, la courbe *Descens. æquab.* est une parabole cubique, comme l'ont trouvé Mrs. Leibnitz, Bernoulli & Varignon. Dans ce cas il est évident que les deux courbes DF, DH, sont quarrables.

XII. Dans certaines hypotheses de résistance, l'équation générale de la courbe *Descens. æquab.* se peut ramener aux premieres differences, & même aux quantités finies.

1°. Si, par exemple, on suppose que le milieu résiste en raison simple directe de la vîtesse du mobile, e sera $= 1$, & l'équation générale deviendra $\frac{dy\,ddy}{(p - q dx^2 - q dy^2)} = \frac{1}{qq} dx$, ou $\frac{2q\,dy\,ddy}{(p-q)\,dx^2 - q\,dy^2} = \frac{2}{q} dx$, dont

dont l'intégrale eſt $lAdx^2 - l((p-q)dx^2 - qdy^2) = \frac{2}{q}x$; d'où repaſſant aux nombres, & (prenant c pour le nombre dont le Logarithme $=1$), l'on a $\frac{Adx^2}{(p-q)dx^2 - qdy^2} = c^{\frac{2}{q}x}$, ou $dy = \frac{dx}{\sqrt{q}}\sqrt{(p-q-Ac^{-\frac{2}{q}x})}$; & faiſant $p=q$, & $-A=BB$, cette équation devient $dy = \frac{B}{\sqrt{p}}c^{-\frac{x}{p}}dx$, dont l'intégrale eſt $y = -Bc^{-\frac{x}{p}}\sqrt{p}+b$, ou $(b-y)c^{\frac{x}{p}} = D$; d'où l'on voit que dans cette hypotheſe, la courbe *Deſcenſ. æquab.* eſt une courbe exponentielle.

2°. Si l'on ſuppoſe que le milieu réſiſte en raiſon doublée de la vîteſſe; l'équation générale $(pn^{e-1}dx^{e+1} - q^e ds^{e+1} = n^{e-1}qqdx^{e-2}dsdds)$ deviendra $qqds^3 + nqqdsdds = npdx^3$, qui eſt la même que nous avons trouvée dans la ſolution particuliere. Cette équation ſe peut ramener aux premieres differences, mais avec des quantités exponentielles; car lui donnant cette forme $\frac{npqdsdds}{npdx^3 - qqds^3} = 1$, & multipliant tout par $\frac{3ds}{n}$, l'on a $\frac{3qqds^2dds}{npdx^3 - qqds^3} = \frac{3ds}{n}$, dont l'intégrale

le est $lAdx^3 - l(npdx^3 - qqds^3) = \frac{3s}{n}$, ou repassant aux nombres $Adx^3 = c^{\frac{3s}{n}}(npdx^3 - qqds^3)$.

3°. Si l'on suppose que le milieu résiste en raison triplée de la vîtesse du mobile, l'équation $pn^{e-1}dx^{e+1} - q^e ds^{e+1} = n^{e-1}qqdx^{e-2}dsdds$, deviendra $\frac{dsdds}{pnndx^4 - q^3ds^4} = \frac{dx^{-1}}{nnqq}$, ou $\frac{\frac{nn}{q}dx^2dsdds}{\frac{pnn}{q^3}dx^4 - ds^4} = dx$, ou $\frac{nndx^2}{q}\left(\frac{2dsdds}{dx^2\sqrt{\left(\frac{pnn}{q^3}\right)} + ds^2} + \frac{2dsdds}{dx^2\sqrt{\left(\frac{pnn}{q}\right)} - ds^2}\right) : dx^2\sqrt{\left(\frac{pnn}{q^3}\right)} = 4dx$, dont l'intégrale est $n\sqrt{\left(\frac{q}{p}\right)}.\ lA\left(dx^2\sqrt{\left(\frac{nnp}{q^3}\right)} + ds^2\right) - l\left(dx^2\sqrt{\left(\frac{nnp}{q^3}\right)} - ds^2\right) = 4x$, ou repassant aux nombres, l'on a $\left(\frac{An\sqrt{p}dx^2 + Aq\sqrt{q}ds^2}{n\sqrt{p}dx^2 - q\sqrt{q}ds^2}\right)^{n\sqrt{\frac{q}{p}}} = c^{4x}$ o $\frac{An\sqrt{p}dx^2 + Aq\sqrt{q}ds^2}{n\sqrt{p}dx^2 - q\sqrt{q}ds^2} = c^{\left(\frac{4}{n}\sqrt{\frac{p}{q}}\right)x}$ ou $An\sqrt{p}ax^2 + Aq\sqrt{q}ds^2 = c^{\frac{4x}{n}\sqrt{\frac{p}{q}}}(n\sqrt{p}dx^2 - q\sqrt{q}ds^2)$.

4°. Si

4°. Si l'on suppose maintenant que le milieu résiste uniformément, on aura $e = 0$, & l'équation $p n^{e-1} dx^{e+1} - q^e ds^{e+1} = n^{e-1} qq dx^{e-2} ds dds$ deviendra $\frac{p}{n} dx - ds = \frac{qq ds dds}{n dx^2}$, ou $p dx - n ds = \frac{qq ds dds}{dx^2}$, dont l'intégrale est $\frac{2px - 2ns + 2na}{qq} = \frac{ds^2}{dx^2}$.

5°. Si l'on suppose que le milieu résiste en raison simple inverse de la vîtesse du mobile; l'équation $p n^{e-1} dx^{e+1}$, &c. devient $\frac{p}{nn} - \frac{1}{q} = \frac{qq ds dds}{nn dx^3}$, ou $pq dx^3 - nn dx^3 = q^3 ds dds$, dont l'intégrale est $(2pqx - 2nnx + 2nna) dx^2 = q^3 ds^2$, ou $(2pqx - 2nnx + 2nna) dx^2 = q^3 dx^2 + q^3 dy^2$, ou $((2pq - 2nn) x + 2nna - q^3) dx^2 = q^3 dy^2$ ou $q^{\frac{3}{2}} dy = dx (\sqrt{(2pq - 2nn) x + 2nna - q^3})$ ou $(y + b) q\sqrt{q} = \frac{1}{3pq - 3nn} 2pqx - 2nnx + 2nna - q^3)^{\frac{3}{2}}$ équation à la 2de parabole cubique.

Quoiqu'un milieu résistant en raison inverse de la vîtesse du mobile n'ait point apparemment lieu dans la Nature, c'est cependant une chose fort digne de remarque, que la 2de parabole cubique qui est dans le vuide la courbe *Descens. æquab.* la soit encore dans cette hypothese; il arrive en quelque maniere à

cette courbe, ce qui arrive à la Cycloïde, qui étant la courbe isochrone dans le vuide, l'est encore dans un milieu résistant en raison simple directe de la vîtesse, outre qu'elle l'est aussi dans un milieu dont la résistance seroit uniforme.

Toutes ces hypothèses de résistance dont nous venons de parler, & plusieurs autres, donneroient des constructions particulieres de la courbe *Descens. aequab.* dont quelques-unes pourroient être plus simples que celle que nous avons donnée. Dans l'hypothese, par exemple, d'une résistance proportionnelle à la simple vîtesse, la courbe se peut construire sans quadrature, par le moyen de la seule Logarithmique; dans les autres, en quarrant des courbes exponentielles.

Mais j'ai mieux aimé donner une construction générale pour toutes les hypothèses de vîtesse, que de détailler toutes ces constructions particulieres.

DE

DE LA NATURE DE LA TERRE EN GENERAL, ET DU CARACTERE DES DIFFERENTES ESPECES DE TERRES.

Par M. DE REAUMUR. *

NOus ne ſavons que trop, qu'en Phyſique, les premiers principes ſont ce qui nous eſt le moins connu. On n'a pu encore nous donner d'idées claires de ces Etres ſimples, dont on a voulu faire les Elémens des autres Corps, de la Terre principe, du Soufre principe, du Sel principe, &c. Il n'eſt pas même bien ſûr que nous puiſſions parvenir à les connoitre, au moins par la voye des Expériences, la ſeule pourtant, en Phyſique, ſur qui on puiſſe compter. Il y a bien loin apparemment d'où nous pouvons partir, juſqu'à des Etres ſimples. La décompoſition, comme la diviſion des Corps, ne peut-elle point être pouſſée juſqu'à l'infini ? De quelque côté qu'on conſidere la Nature, l'Infini ſemble le ſeul terme qui lui ſoit preſcrit. Auſſi la Terre, dont nous nous ſommes propo-

* 23 Juin 1730.

posés d'examiner le caractere dans ce Mémoire, n'est nullement un Etre simple; ce n'est point cette Terre élémentaire d'Aristote, & de bien d'autres, c'est une Terre à nous plus connue, quoiqu'on n'ait pas pris soin de s'en faire des notions assez déterminées.

Il seroit extrêmement à desirer d'avoir des idées bien distinctes des premiers principes, nos connoissances en seroient plus complettes: mais les connussions-nous bien, nous ne devrions pas y remonter, lorsque nous avons à déterminer la nature de la plupart des corps qui sont l'objet de nos recherches. Nous expliquerions mal la nature de ces corps, nous n'en donnerions pas les idées qu'on en veut avoir, si nous la prenions dès les premiers principes. Il faut nous arrêter bien plus près, & il ne nous est pas toujours permis de nous arrêter aussi près qu'il en seroit besoin. On veut me faire connoitre un corps, un composé; qu'on me fasse connoitre les élémens prochains, dont il a été formé, fussent-ils eux-mêmes très corps, très composés. J'employerai volontiers une comparaison, quoique peu noble, qui me paroît très propre à faire voir qu'on nous instruit mal, quand on passe tout d'un coup à des principes trop éloignés; & c'est malheureusement le défaut de la Chymie, à qui nous devons néanmoins tant de belles connoissances physiques; elle ne nous montre que rarement les élémens immédiats. J'amene de l'Amérique, ou des Indes, quelqu'un dont la Physique a toujours été la passion; je le suppose très versé dans toutes les manipula-
tions

tions de Chymie, mais très ignorant ſur tout ce qu'on a imaginé en Europe, pour flater le goût; je le conduis chez un Pâtiſſier, où je lui montre des gâteaux de toutes eſpeces, des biſcuits, & de toutes les ſortes de friandiſes qui ſont l'ouvrage de cet Art. Je lui demande ce que chacun de ces compoſés a de propre, quelle eſt leur nature? Si pour m'en rendre raiſon, il a recours à l'Analyſe, qu'il en vienne à des diſtillations, à des cohobations, &c. il pourra me dire qu'il y a plus de parties huileuſes dans certains gâteaux, que d'autres ont plus de Sels, que d'autres ont plus d'acides; il pourra déterminer la proportion qui eſt entre les parties terreuſes, & les Soufres, & les Sels. Mais m'en aura-t-il donné plus d'idée des compoſitions ſur leſquelles je l'ai interrogé, que ſur celles de quelques Pierres, ou de quelques Plantes, qui pareillement traitées auroient donné des principes aſſez ſemblables? Il devoit me dire, que tel gâteau n'eſt fait que d'eau commune, de farine, & de beurre; que les œufs ſont entrés dans un autre; que dans un autre, on a fait entrer de la levure de biere, que le ſucre eſt entré dans la compoſition d'un autre, qu'un autre eſt fait d'amandes pilées. Enfin il falloit encore me dire, que ſelon la façon dont le beurre a été mêlangé avec la farine, on a fait des gâteaux feuilletés ou non feuilletés. Si le Pâtiſſier fait connoitre à notre Philoſophe les matieres qu'il employe, & la façon dont il les employe, il verra qu'il a eu tort de recourir à des quinteſſences, pour découvrir la nature de ces compoſitions.

Quand

Quand la Nature travaille à former des gâteaux d'une autre espece, des Pierres à grains, des Pierres feuilletées, des Métaux, des Mineraux, elle n'a pas toujours des quintessences à employer; elle se sert des sables, des soufres, des bitumes, tels qu'ils sont. Pour faire entrer les bitumes, les soufres dans ses ouvrages, souvent elle ne les analyse pas plus que le Pâtissier analyse son beurre. En un mot, c'est avec des composés qu'elle forme la plupart des corps, qui sont l'objet de nos considerations.

Je sai bien qu'on peut pousser ses recherches jusqu'à examiner quelle est la nature de chacun des composans d'un composé, que nous le devons même, quand ils nous donnent prise; mais ce que je sai aussi, c'est que nous ne pouvons pas porter loin les décompositions, & peut-être y a-t-il prodigieusement à faire avant d'arriver à des Etres simples, aux premiers élémens.

Il y a un certain nombre de matieres, toutes très composées, qui se combinent assez ordinairement dans la plupart des corps, l'Eau, la Terre, le Feu, ou les matieres inflammables, les Sels, &c. Quelques-uns les ont toutes prises pour des élémens; d'autres, selon leur prédilection pour quelques-unes, n'en ont pris que deux ou trois, ou qu'une seule, pour premier principe. Mais avant de leur donner cette qualité, on les a bien plus épurées par l'imagination, qu'elles ne le sont quand elles tombent sous nos sens. La Terre est une de celles à qui on a été le plus disposé à accorder ce rang. Aussi tant que nous

nous

nous en tiendrons aux principes immédiats, aux principes qui eux-mêmes peuvent en avoir d'autres, la Terre nous paroîtra la principale base des corps physiques. Mais cette Terre qui entre dans la composition des corps, n'est que celle qui est continuellement sous nos yeux, & qui pourtant ne nous est pas assez connue. On n'en a eu que des idées vagues, on n'a point consideré quelles sont ses principales proprietés, celles qui constituent son caractere. J'ai cherché à les déterminer, & à distinguer les differentes especes de Terres par le plus ou le moins qu'elles participent à chacune des proprietés communes à toute Terre. J'ai éprouvé le besoin que j'avois d'avoir des caracteres fixes de la Terre en général, & des especes en particulier, dans quelques essais que j'ai faits sur la Physique des Minéraux, dans les observations que j'ai voulu faire sur les diverses Terres, les plus favorables à la végétation des Plantes; je l'ai de même éprouvé, quand j'ai voulu suivre les matériaux qu'employent divers Arts, tels que les Arts des Verriers, ceux des Potiers, ceux des faiseurs de Fayance & de Porcelaine; ils demandent tous qu'on sache, & ce que c'est que la Terre en général, & ce qu'ont de particulier ses differentes especes.

Nous donnons, sans hésiter, le nom de *Terre* à l'amas de matieres qui occupe un champ, où des Plantes croissent, ou peuvent croître; nous donnons ce nom à un tout, dont nous imaginons que la Terre fait une grande partie. Qu'on en sépare les grosses & les

les menues pierres, le reste sera encore Terre pour nous, & même le sera davantage. Qu'on ait ensuite recours à quelque expédient, comme à des lotions, pour séparer de la masse ces petits grains durs que nous appellons *Sable*; après que tout le Sable sensible aura été séparé, nous conserverons encore le nom de Terre à la matiere restante, & selon l'idée que nous nous sommes faite de la Terre, nous croirons qu'elle le mérite même mieux, qu'elle en est plus Terre. Mais cette matiere restante, cette Terre, qu'est-elle? n'est-elle elle-même qu'un Sable beaucoup plus fin que celui que nous avons enlevé? qu'un Sable dont les grains, pris séparément, échapent à nos yeux par leur petitesse? ou est-elle une matiere qui differe véritablement du Sable, qui ait un caractere particulier & bien marqué?

Les Physiciens n'ont pas trop cherché à prendre parti sur l'un ou l'autre de ces sentimens, ou plutôt ils semblent avoir cru qu'il n'y avoit pas à déliberer entre deux sentimens. Quand Rohault a parlé de l'Argile, qui est une espece de Terre très commune, il a dit sans hésiter, *Que la production de l'Argile n'est pas beaucoup differente de celle du Sable; qu'il faut seulement ajouter que ses grains sont encore probablement plus petits, pour laisser entre eux de plus petits intervalles, & ainsi composer un tout que l'eau puisse difficilement pénétrer.* L'autorité de M. de la Quintinie ne seroit pas comparée en Physique à celle de Rohault, si on y faisoit usage des autorités; mais il avoit eu plus d'occasions que ce Physicien, d'exa-

d'examiner les differentes especes de Terres, & comme lui, il veut qu'elle ne soit, en général, qu'un amas de grains de Sable extrêmement déliés. Les Terres labourables font naturellement prendre cette idée; on y trouve une grande quantité de Sable, aisé à reconnoitre; de-là on est porté à croire que les molécules, parmi lesquelles ce Sable est mêlé, ne sont eux-mêmes que des amas de grains semblables, mais imperceptibles à nos yeux, quand ils sont seuls; & ce que nous appellons Terre, sont des amas de grains de Sable extrêmement fins.

Cependant, puisque les grains de Terre échapent à notre vue, par leur petitesse, nous sommes hors d'état de décider par cette voye, s'ils sont simplement un Sable plus divisé, plus broyé, ou s'ils sont d'une nature differente de celle du Sable. Les grains de Sable de differentes grosseurs que nous appercevons, ne sont pas une induction suffisante pour nous déterminer à assurer qu'ici tout ce qui ne nous est pas visible, ne differe de ce qui l'est, que par son peu de grosseur. Quelqu'un dont les yeux seroient, par rapport aux nôtres, ce que les nôtres sont par rapport à ceux de certains Insectes, pourroit ne voir les Pierres parsemées dans un champ, que de la grosseur dont nous paroissent les grains de Sable; son induction le tromperoit souvent, s'il assuroit que les grains de Sable du champ ne sont autre chose que des fragmens de ces Pierres. Il éviteroit cette erreur, s'il venoit à examiner les proprietés des Pierres mêmes, & ceux de ces préten-

dus fragmens; les Pierres de tel champ se réduiroient en Chaux, pendant que le Sable du même champ se vitrifieroit. Ce n'est aussi qu'après avoir examiné les proprietés du Sable, & celles de la Terre proprement dite, que nous pourrons décider s'ils sont une même matiere, ou des matieres differentes ; & cet examen nous apprendra que l'un & l'autre ont leurs proprietés particulieres, & que la Terre ne differe peut-être pas moins du Sable, que le Sable differe des Métaux & des autres Mineraux.

Des expériences très communes sont capables de nous donner ici de grandes lumieres. Nous voyons journellement que les corps de certaines classes ne sont nullement ou peu pénétrables à l'eau. Elle ne fait point passer au travers des ouvrages d'Or, d'Argent, de Plomb, de Verre. Quand les Crystaux, les Cailloux ont été exposés à l'air pendant un certain tems, l'eau ne peut plus s'y insinuer, au moins en quantité sensible. Au contraire non seulement l'eau s'introduit dans les Sels, elle se les approprie, elle les dissout, elle semble ensuite faire un tout avec eux. Enfin l'eau s'insinue dans des corps d'une troisieme classe; en s'y insinuant, elle augmente leurs dimensions sous certains rapports: tels sont la plupart des bois & les matieres solides qui nous viennent des Plantes, les peaux, les chairs dessechées des Animaux; en un mot tous les corps que nous nommons *spongieux*, parce qu'ils ont tous une qualité que l'Eponge a autant ou plus qu'aucun autre, que tous s'abreuvent d'eau. L'eau dont ils sont abreu-

vés

vés augmente leur volume, & quand elle vient à s'en évaporer, ils retournent à leurs premieres dimensions.

Les caracteres de ces trois classes sont très marqués ; les corps qui se rangent sous la premiere, doivent être regardés comme fort differens de ceux qui se rangent sous la troisieme. Il est pourtant aisé de s'assurer, dès qu'on cherche à s'instruire, que le Sable doit être mis dans la premiere, & que c'est dans la derniere que la Terre doit être placée. L'expérience la plus simple suffit ici. Qu'on remplisse un vase de Sable, qu'on arrose ce Sable d'eau peu-à-peu, & qu'à diverses reprises on en verse même jusqu'à ce qu'elle le surnage. Si avant d'avoir commencé à humecter ce Sable, on a marqué où se terminoit sa surface, ce qui est toujours très facile, sur-tout si l'on fait l'Expérience dans quelque bouteille de Verre transparent, on observera que la surface du Sable bien humecté ne se sera aucunement élevée. Il arrivera même quelquefois qu'elle s'abaissera un peu, parce que l'eau, qui a pénétré, a pu faire changer de place quelques grains de Sable, les porter dans des espaces qui, quoique capables de loger des grains, étoient restés vuides. Qu'on fasse ensuite évaporer cette eau, la surface du Sable restera toujours au même endroit. Rien n'a dû contribuer à l'élever ou à l'abaisser. La vue simple nous met en état de juger que les grains de Sable sont semblables à des fragmens de Crystaux ou de Cailloux, qu'ils sont de même transparens, & que leurs surfaces sont polies,

polies, ferrées; en un mot, on juge qu'ils sont impénétrables à l'eau, comme les Cailloux & les Crystaux. Ils ont pareillement une pesanteur spécifique qui surpasse celle de l'eau. Qu'a donc pu faire l'eau qui a été versée sur une masse de Sable? ce n'a été que de descendre par les petits passages qui lui sont restés, & de remplir les vuides qui sont entre les grains. Rien ne tend jusques-là à augmenter la masse, & rien ne tendra à la diminuer, lorsque l'eau s'évaporera. Seulement la masse humectée à fond, doit être plus solide, résister mieux à la force qui par sa pression tendroit à faire glisser les grains. L'eau les lie mieux entre eux que ne faisoit l'air; les grains sont alors plus difficiles à déplacer. C'est une Physique connue de reste de ceux qui voyagent dans des chemins où il se trouve du Sable.

Il en sera de même, si au-lieu de remplir le vase dont nous venons de parler, de Sable grossier, on le remplit d'un Sable prodigieusement fin. L'eau dans ce second cas n'est pas plus en état de pénétrer dans la substance de chaque grain, qu'elle l'étoit dans le premier cas; elle n'a pas plus de facilité à s'introduire dans des fragmens de Cailloux & de Crystaux, que dans des Crystaux & des Cailloux entiers; elle n'a pas plus de facilité à pénétrer dans des fragmens de Sable, que dans les gros grains dont ils ont fait partie. Elle ira remplir les vuides que les petits grains laissent entre eux, si elle trouve des routes pour y arriver; de sorte que quelque fine que soit la poudre sablonneuse, contenue dans un vase, on

on n'augmentera aucunement son volume, si on l'humecte peu à peu : aussi ne lui fera-t-on rien perdre de celui qu'elle avoit mouillée, si on la seche doucement; mais les circonstances de ne l'humecter ni de la secher trop brusquement sont nécessaires, pour des raisons que nous expliquerons ailleurs.

Remplissons un vase pareil à celui où nous avons mis jusqu'ici nos differens Sables, de quelques graines fines, de Millet, de graines de Navette, &c. & versons par-dessus cette graine la quantité d'eau qui pourra être reçue. L'eau ira d'abord occuper les intervalles que les grains laissent entre eux, mais elle ne s'en tiendra pas là, comme elle fait quand le vase est plein de Sable; peu à peu elle s'introduira dans chaque grain, elle les gonflera tous. Bien-tôt le vase sera plus que plein, les grains s'éleveront par-dessus ses bords; & si on veut ensuite les faire secher, on ramenera la masse à son premier volume : il en arriveroit de même, si au-lieu de graines, ont eût employé de la sciure de bois.

Enfin prenons un vase rempli d'une Terre seche, ou pour éviter actuellement les difficultés qui se peuvent trouver à bien remplir le vase, prenons un morceau d'une Terre solide bien seche, & dont toutes les dimensions soient aisées à mesurer; un morceau de Glaise, par exemple, à qui on aura donné la figure d'un cube, d'un parallelépipede, d'un cylindre. Humectons cette Terre seche, & après que nous aurons eu donné à l'eau le tems de la pénétrer, mesurons une seconde fois ses dimensions, nous les trouverons toutes

tes augmentées ; faisons ensuite secher cette même masse de Terre, & nous la ramenerons à son premier volume. En un mot, une masse de Terre, comme un morceau de bois, acquiert du volume lorsque l'eau la pénétre, & en perd quand l'eau s'en évapore.

Ces observations simples & communes nous conduisent, ce me semble, bien directement à regarder chaque molécule, chaque grain de Terre, comme un petit corps spongieux que l'eau peut pénétrer & distendre, & par conséquent comme un corps composé de parties flexibles. Au-lieu que les grains de Sable sont des corps roides, inflexibles, impénétrables à l'eau. Ces derniers ont aussi une transparence que n'ont pas les grains de Terre ; des corps spongieux n'ont pas une disposition prochaine à la transparence.

Si les grains de Terre étoient composés de parties roides, qui laissassent simplement entre elles des cavités propres à recevoir une certaine portion d'eau, tout ce qui en arriveroit, c'est que l'eau se logeroit entre les parties d'un grain, comme elle se loge entre les differens grains de Sable. La poudre de charbon qui est spongieuse, mais composée de parties roides, ne se renfle point par l'humidité, elle commence à s'éloigner de la Terre, & à s'approcher du Verre. Le volume de chaque grain de Terre, & celui de la masse entiere, ne seroit pas augmenté par l'eau si les grains étoient simplement spongieux, comme ceux du charbon. Mais l'eau ne s'introduit pas seulement entre les parties du grain, elle les écarte, comme elle écarte

les

les fibres du bois, où elle s'insinue. Ce n'est pas une petite difficulté en Physique, que d'expliquer d'où l'eau prend la force, au moyen de laquelle elle distend les corps dans lesquels elle s'introduit, car cette force est prodigieuse; son effet ne peut être arrêté par les plus grands fardeaux suspendus au bout des cordes; des coins de bois humectés s'enflent, quoique renfermés entre des masses de roches, telles que les meules de Moulin, & les font sauter. Je n'entreprends point actuellement d'expliquer la cause d'où dépend ce grand effet de l'eau, mais il nous suffit d'avoir commencé à établir, qu'une des principales proprietés de la Terre, une de celles qui la distingue des Cailloux, des Cristaux, des Sables, &c. est d'être spongieuse, & de se laisser renfler par l'eau. Il étoit plus important qu'il ne semble, de bien connoître cette proprieté de la Terre, de savoir qu'elle ne la partage point avec les Sables. Nous aurons bien-tôt occasion de voir combien nous en pouvons tirer de lumieres, par rapport à plusieurs productions, soit de la Nature, soit de l'Art. Quand nous viendrons, par exemple, à expliquer la formation des Pierres, nous verrons qu'elles ne sont que du Sable & de la Terre, réunies en une masse. Nous aurons des caracteres pour distinguer les differentes especes de Pierres, en faisant voir les differentes proportions dans lesquelles sont faits, dans les unes & dans les autres, les mélanges de Terre & de Sable. Aussi regardai-je cette proposition, comme une des propositions fondamentales

de cette partie de la Physique où on examine la composition des Mineraux, & des autres Corps terrestres; nous ne la saurions donc prouver trop solidement.

Il se fait journellement une sorte de reproduction de la Terre, très propre à nous confirmer dans l'idée que nous avons prise de chaque grain de Terre, comme d'un corps spongieux. Nous voyons, pour ainsi dire, renaitre la Terre, chaque jour, par la décomposition des corps, à la formation desquels elle a beaucoup de part. Du bois, des feuilles, des Plantes ne sont pas de la Terre; mais le Terreau, employé par les Jardiniers, n'est-il pas une espece de Terre? Si on ne veut pas encore le reconnoitre pour tel, lorsqu'on l'étend sur les couches, sur les plattes-bandes, au moins ne hésitera-t-on pas à le prendre pour vraye Terre, lorsqu'il aura resté exposé à l'air pendant deux ou trois ans, qu'il aura aidé pendant ce tems à la végétation des Plantes; alors on ne pourra plus le distinguer de la Terre ordinaire des Jardins. Or, qu'est-ce que du Terreau? ce n'est que du fumier plus pourri; & qu'est-ce que ce fumier? ce sont des pailles, des herbes, des feuilles d'arbres qui ont été corrompues jusqu'à un certain point. A la Campagne, on fait des tas de toutes sortes de feuilles, & de toutes sortes de Plantes communes, comme des fougeres; on met même en tas, en quelques Païs, des arbustes, comme des Genêts ordinaires ou des Genêts épineux; ces Plantes ainsi amoncelées, sont arrosées par l'eau des Pluyes; l'humidité qu'elle y entre-

tretient, les fait fermenter, elles se corrompent, elles se changent en fumier, qui porté dans les champs, y devient Terreau, & ensuite de véritable Terre. C'est ainsi qu'on rend chaque année à un champ, au moins une partie de ce qu'on lui a ôté pendant la recolte. Voilà donc des Plantes redevenues Terres, ou si l'on veut, on a retiré de ces Plantes ce qu'elles avoient de Terre. Qu'est-ce qu'étoient ces Plantes? des composés d'une infinité de tuyaux, ou de fibres spongieuses. Elles reparoissent sous la forme de Terre, après avoir été divisées en parties d'une extrême petitesse; à la vérité, la division qui a été faite, n'est pas précisément semblable à celle qui se feroit par des haches, des ciseaux, des pilons; du bois, des feuilles réduites en la poudre la plus fine, ne sont pas précisément pour cela de la Terre. La division ici a été l'ouvrage de la fermentation. Le mouvement qu'elle produit, ne se réduit pas à séparer un tout en diverses portions, chacune semblable à celles qui formoient le tout. Elle divise, pour ainsi dire, chaque partie, elle la décompose; elle met les Soufres & les Sels les plus volatils en état de s'évaporer. Ils s'évaporent à mesure que les parties pourries se séparent, & qu'elles leur permettent de s'élever. A mesure donc que les parties de nos Plantes perdent plus de leurs Soufres & de leurs Sels volatils, & qu'elles se divisent en plus petits grains, elles se rapprochent davantage de la nature de la Terre commune; enfin elles se trouvent réduites à l'état de cette Terre, lorsque

que la diviſion & l'évaporation ont été portées aſſez loin.

En ſuivant cette ſorte de génération, ou de revivification de la Terre, nous voyons qu'elle a été tirée de corps flexibles, de corps ſpongieux qui ont perdu une certaine quantité des parties qui entroient dans leur compoſition. La diſſipation qui s'eſt faite de certaines parties ne paroît pas propre à augmenter la ſolidité de la tiſſure des parties d'où celles-là ont été dégagées, elles ne ſemblent que la devoir rendre moins denſe, plus ſpongieuſe. Ainſi il ſemble que chaque molécule de Terre doit être au moins auſſi ſpongieuſe, & même l'être davantage que chaque molécule de Plante. Enfin il eſt clair au moins qu'un molécule, qu'un grain de Terre differe d'une partie d'une pareille groſſeur de la Plante, en ce qu'elle a moins de Soufres & de Sels volatils; elle n'a gardé que les plus fixes des uns & des autres.

La fermentation qui ſe fait dans les Plantes, pour les réduire en fumier ou en Terreau, conſerve non-ſeulement leur tiſſure ſpongieuſe, elle donne de plus à la matiere qui paroît ſous une nouvelle forme, une ſorte de tiſſure poreuſe qu'elle n'avoit pas auparavant. C'eſt ce qui eſt prouvé par une expérience que j'ai faite ſur des feuilles de Vigne que j'ai miſes chez moi en tas & à couvert, pour les y faire pourrir, ſans ſe mêler avec d'autre Terre. Quand elles ont été pourries juſqu'à ce point où elles perdent leur nom pour prendre celui de Terreau, elles ont fermenté vivement, & ſubitement avec les acides

des que j'ai versés dessus. Au-lieu que l'Esprit de Nitre versé sur des feuilles vertes, sur des feuilles seches, ou sur des feuilles simplement commencées à pourrir, n'y produit aucune fermentation sensible.

Je sai bien qu'il se peut faire une décomposition des Plantes qui nous donnera un résidu terreux, plus compacte, moins spongieux, moins propre à se renfler & à se raccourcir, que les parties des Plantes ne l'étoient, & telles sont les cendres que nous laisse le bois brûlé. Mais ces cendres aussi approchent beaucoup plus de la nature du Sable, que de celle de la Terre, comme nous le prouverons ailleurs. Un Agent plus violent que ceux qui agissent dans la fermentation, a exercé ses forces contre le bois; quand le feu l'a brûlé ç'a été dans un instant qu'il a enlevé une quantité considerable de matieres; des matieres, même peu volatiles, ont cedé à la force de son action, comme il paroît par la suye qui s'assemble dans les cheminées. Il a changé la tissure du tout; s'il a écarté certaines parties les unes des autres, il en a rapproché d'autres. Tout se passe plus paisiblement dans une fermentation aussi douce que celle qui occasionne la dissolution des Plantes, il n'y a que les parties les plus volatiles qui s'élevent. Il n'y a pas de mouvemens assez considerables pour rapprocher des parties qui par leur tissure naturelle sont écartées, pour rendre compacte ce qui est spongieux.

Si après avoir dissout certaines Terres dans l'eau, c'est-à-dire, si après avoir agité de l'eau

au-fond de laquelle il y avoit de la Terre, & l'avoit rendue bourbeuſe, on laiſſe raſſeoir cette eau dans un verre tranſparent, & qu'on obſerve ce qui ſe paſſe pendant qu'elle s'éclaircit; il ſemble alors que les formes de maſſes ſpongieuſes, que nous avons attribuées à chaque grain de Terre, ſe manifeſtent. Du moins voit-on deſcendre vers le fond du verre des flocons ſemblables à ceux de la neige, ou à ceux qui nagent dans le lait caillé. Si on obſerve l'eau dans laquelle ſe précipite le Sable le plus fin, & où il s'y précipite auſſi lentement que fait la Terre dans l'eau dont nous venons de parler, on n'y apperçoit nullement de pareils flocons; les grains de Sable n'en ſont point, & ne ſont pas propres à en former par leur réunion.

Il eſt encore à remarquer, que ſi après avoir rendu du Sable extrêmement fin par la trituration, on l'abreuve de la quantité d'eau néceſſaire pour en former un petit gâteau, que dès que cette petite maſſe eſt ſortie des mains, & poſée à plat, qu'une couche d'eau vient couvrir ſa ſurface. Un gâteau de Terre pétri de la même maniere, ne paroîtra pas couvert d'une couche d'eau, elle ne s'aſſemble point ſenſiblement ſur ſa ſurface. Dans le premier cas, l'eau ne peut être retenue que dans les interſtices des grains. Dans le ſecond, elle eſt dans les grains mêmes, & ce n'eſt que peu à peu qu'elle peut s'en dégager, c'eſt-à-dire, à meſure que celle de la ſurface s'évapore.

Quoique la proprieté d'être ſpongieuſe, de ſe laiſſer renfler par l'eau qui la pénetre, ſoit

soit selon moi une de celles qui caractérise le mieux la Terre, & une de celles dont on peut faire le plus d'usage dans l'explication des phénomenes, elle en a un autre qui va de pair, dont l'existence est plus aisée à démontrer, & qui prouve même l'existence de la premiere. Le caractere le mieux marqué que nous ayons, pour distinguer les Métaux des Mineraux, c'est leur malléabilité; de ce que, soit à froid, soit à chaud, ils soutiennent les coups de marteau sans se casser. Tous les composés que nous avons mis dans la classe des Métaux, ont cette proprieté; quand ils sont purs, quand ils ne sont point alliés avec des matieres qui la leur ôtent, soit qu'on les frappe, soit qu'on les tire par une filiere, dont la force équivaut à celle de la percussion, on les étend sans les casser, ils sont ductiles. La Terre est aussi caractérisée par une espece de ductilité que n'ont ni les autres Mineraux, ni les Métaux. Sa ductilité est de l'espece de celle de la pâte; la Terre est pétrissable. Lorsqu'on la ramollit par l'eau, elle se laisse étendre, elle prend entre les doigts la forme qu'on veut lui donner, & elle la conserve. C'est à cette proprieté de la Terre à qui nous sommes redevables du bas prix auquel sont tant d'ouvrages de Poterie & de Fayance, si commodes pour une infinité d'usages. Un ouvrier exercé fait prendre sur le Tour les figures de vases arrondis à une masse de Terre informe, & cela presque sur le champ.

Toutes les Terres n'ont pas cette proprieté à un même degré; celles qui l'ont le plus,

font appellées des *Terres graſſes*, & celles qui l'ont le moins, des *Terres maigres*. Les Terres les plus maigres, les moins ductiles, font celles qui fe rapprochent le plus du Sable, car cette ductilité, propre à la Terre, manque entierement aux Sables. Une maſſe de Terre peut être maigre de deux manieres: ou parce que la vraye Terre ne fait qu'une portion du tout, dans lequel entre une portion conſiderable de Sable. Ainſi nos Terres labourables ſont-elles toutes mélangées avec une quantité de Sable ſenſible, qui en peut être ſéparé par des lotions; elles ne ſont ſouvent plus maigres les unes que les autres, que parce que le Sable y eſt mêlé en plus grande proportion. Mais diverſes Terres ſont par elles-mêmes, indépendamment du Sable avec lequel elles ſont mêlées, moins ductiles, moins graſſes que bien d'autres Terres, la tiſſure de leurs grains ſe rapproche plus de celle des Sables, & s'éloigne de celle des Terres les plus graſſes. Ces remarques fourniſſent le fondement de la diviſion des Terres en bien des eſpeces, toutes aiſées à caracteriſer.

Quoiqu'il ſoit très ſûr que le Sable ordinaire, que le Sable dont les grains ſont ſenſibles, n'a aucunement la ductilité des Terres graſſes, on doutera peut-être, & avec vraiſemblance, ſi ce manque de ductilité ne doit pas être attribué uniquement à la groſſeur de ſes grains; ſi le Sable réduit en grains auſſi fins que ceux de la Terre, ne donneroit pas de même une pâte traitable: car il eſt évident que plus les grains ſeront fins, &

& plus ils auront de diſpoſition à ſe lier enſemble. Cependant j'ai fait réduire par un long broyement le Sable dans une poudre extrêmement fine, & j'ai eu grand regret de voir que quelque trituré qu'il eût été, il ne faiſoit jamais une pâte qui eût cette liaiſon, cette onctuoſité, qui met les pâtes de Terre en état d'être travaillées. Lorſque je traiterai de la maniere de faire les differentes eſpeces de Porcelaines, on verra combien j'ai dû deſirer de parvenir à avoir une pâte de pur Sable qui fût ductile, & avec quels ſoins j'ai dû tenter les Expériences qui pouvoient la faire eſperer.

Mais quelques ſoins que j'aye pris pour faire bien broyer du Sable, on peut pourtant penſer que la petiteſſe à laquelle j'ai réduit ces grains, n'approchoit pas de celle où la Nature les peut amener, & de celle que la Nature a réellement donnée aux grains qui compoſent les Terres graſſes. J'ai craint que cela ne fût ainſi; mais des Expériences m'ont prouvé que j'avois des pâtes de Sable très peu traitables, quoique leurs grains ne fuſſent peut-être pas plus gros, ou peut-être le fuſſent moins, que les grains de Terre. La meilleure maniere de ſéparer le Sable de la Terre avec laquelle il eſt mêlé, eſt de détremper la maſſe compoſée dans une ſuffiſante quantité d'eau, de faire du tout une eau bourbeuſe; & de laiſſer enſuite repoſer cette eau pendant quelque tems, c'eſt-à-dire, juſqu'à ce qu'elle commence à s'éclaircir. Les grains les plus gros & les plus peſans ſe précipitent les premiers, bien-tôt ils tombent au fond

du vase : si on verse l'eau doucement par inclination, elle n'emporte avec soi que les parties les plus fines & les plus legeres qui y étoient restées suspendues. Si cette eau a été reçue dans un second vase, & qu'on l'y laisse reposer pendant un tems plus long que celui où on l'a laissée dans le premier, peu à peu elle y dépose les parties dont elle étoit chargée, elle reprend avec le tems sa premiere limpidité. Dans le premier vase il est resté un sédiment sablonneux, qui n'est plus mêlé avec une aussi grande portion de Terre qu'il l'étoit d'abord, & ce qui a passé dans le second vase est une Terre mêlée avec peu de Sable, ou avec le Sable le plus fin. Si on répete un nombre de fois suffisant des operations semblables sur le sédiment sablonneux du premier vase, ce sédiment se trouve purgé de toute Terre, c'est du Sable aussi pur que nous pouvons nous proposer de l'avoir. Comme l'un des sédimens venus de la premiere operation, n'étoit pas pur Sable, de même l'autre sédiment venu de cette même operation n'étoit pas pure Terre; il est resté de la Terre dans l'un, & il a passé du Sable avec la Terre dans l'autre. Si on répete pareillement ces operations sur le sédiment terreux, c'est-à-dire, si on travaille à séparer le Sable fin qui étoit resté mêlé avec la Terre, plus on donnera le tems à l'eau de se reposer, avant de la transvaser, & plus on donnera de facilité au Sable de se séparer, plus aussi on en dépurera la Terre.

Mais quand les operations auront été répetées un certain nombre de fois, inutilement les répeteroit-on davantage; si les grains de

de Sable qui restent mêlés avec ceux de la Terre sont d'une telle petitesse, qu'ils n'ayent pas plus de force pour vaincre la résistance que l'eau oppose à leur descente, qu'en ont les grains de Terre, les grains de Terre & les grains de Sable se précipitent alors pêle-mêle. Reste à savoir, & c'est précisément la question à éclaircir, si ces grains de Sable qui ne sont pas plus en état de se précipiter que des grains de Terre, si des grains de Sable si petits n'ont pas les qualités que nous regardons comme particulieres à la Terre, s'ils ne peuvent pas faire une pâte ductile. Une Expérience bien simple me donne les éclaircissemens nécessaires pour décider la question.

Je réduis par le broyement le Sable dans une poudre extrêmement fine, j'y réduis de même du Verre. J'entreprends de faire des pâtes avec l'une ou l'autre de ces poudres, & je trouve que, dans quelque portion que je les délaye avec de l'eau, je n'ai jamais une pâte grasse, onctueuse, en un mot, ductile. Si je puis démontrer que ces grains sont cependant aussi fins que ceux d'une Terre ductile, j'ai démontré que la ténuité seule des grains ne suffit pas pour donner une pâte grasse : or les remarques précédentes nous mettent en état de décider si ces grains de Sable ou de Verre sont aussi déliés que ceux de la Terre. Pour cela je n'ai qu'à prendre une Terre grasse, bien reconnue pour Terre, & à l'allier avec une quantité connue de poudre de Sable ou de Verre, c'est-à-dire, à faire une pâte de poudre de Sable & de Ter-

re, de poudre de Terre & de Verre; & après avoir bien fait ces mêlanges, tenter par des lotions de séparer le Verre ou le Sable d'avec la Terre. Si je n'y parviens point, je suis certain que les grains de Verre ou de Sable se soutiennent aussi aisément dans l'eau que ceux de Terre; d'où je suis en droit de conclure que les grains de Sable & de Verre sont aussi déliés que ceux de Terre: je pourrois même conclure qu'ils sont plus fins, parce qu'on sait d'ailleurs que la pesanteur spécifique du Sable & du Verre sont plus grandes que celles de la Terre; ainsi les grains de Sable, pour rester également suspendus dans le liquide, doivent être plus petits, il faut qu'une augmentation de surface ce compense leur excès de pesanteur sur celle des grains de Terre; or j'ai composé des pâtes de Terre glaise, & d'autres Terres grasses mêlées soit avec du Sable réduit dans une poudre très fine, soit avec du Verre broyé au même point, d'où je n'ai pu ensuite séparer par des lotions que peu ou point du Sable ou du Verre que j'y avois fait entrer: donc les grains de ces poudres de Verre & de Sable étoient aussi fins que ceux de la Terre. Cependant des pâtes faites uniquement de ces mêmes Sables, ou de ces mêmes Verres broyés, ne sont pas ductiles: donc la finesse des grains ne suffit pas pour composer une pâte ductile.

Quoiqu'il y ait entre le Verre & le Sable des differences, je ne les regarde que comme celles qui sont entre les differentes especes de Verres, & nous sommes en droit ici de les traiter également, dès que les grains

de

de l'une & de l'autre de ces matieres ont des surfaces polies, & qu'elles sont l'une & l'autre impénétrables à l'eau. Une espece de Verre, dont on avoit fait des Bouteilles où le Vin s'alteroit, a donné occasion à M. Geoffroy le cadet de faire une fort curieuse observation; c'est qu'il y a des Verres qui, comme les matieres métalliques, se laissent dissoudre par l'Esprit de Nitre, & encore mieux par l'Huile de Vitriol. Les dissolvans sont des Agens semblables à ceux que la Nature employe, les parcelles dans lesquelles ils divisent les corps sont bien d'une autre finesse que celles qui nous viennent après des triturations ordinaires. J'ai fait dissoudre de ces Verres alterables, & quand la dissolution a été faite, j'ai édulcoré, le mieux qu'il m'a été possible, le Verre dissout, c'est-à-dire, qu'en le lavant à bien des reprises, j'ai emporté tout le Sel que l'eau en pouvoit emporter. Cette poudre, toute fine qu'elle étoit, n'a point été propre à donner une pâte ductile. On auroit tort si on mettoit sur le compte des Sels, qui sont restés engagés dans le Verre, ce manqué de ductilité. Une Terre ductile, après avoir été soûlée de Sel, de quelque espece que ce soit, se laisse pétrir & bien étendre.

Dès qu'on y regarde de près, on apperçoit aussi qu'il ne suffit pas que les grains d'une poudre, qui a été détrempée par l'eau, soient extrêmement fins, pour que la pâte qui en vient soit ductile. La ductilité de toute masse, de toute matiere, suppose que ses parties ont entre elles un certain dégré de liaison; & el-

le ſuppoſe de plus, que lorſqu'on fait changer de forme à cette maſſe, que lorſqu'on déplace ſes parties, qu'il y en a qu'on fait mouvoir ſur d'autres; que les parties, pendant leur déplacement, ſont auſſi adhérentes aux parties qu'elles rencontrent, qu'elles l'étoient à celles qu'elles touchoient pendant qu'elles étoient en repos; qu'il en eſt de chacune de ces parties, à peu près comme d'un morceau de Marbre qui touche par une ſurface plane & polie, une table de Marbre auſſi plane & auſſi polie; qui voudroit l'enlever, auroit à vaincre une réſiſtance plus grande que celle du poids de ce morceau de Marbre; & on trouveroit la même réſiſtance, ſoit qu'on voulût l'enlever pendant qu'il eſt en repos, ſoit pendant qu'il eſt forcé de gliſſer ſur la ſurface de la table. Des grains anguleux, tels que ceux de tout Sable & de toute poudre de Sable, des grains d'ailleurs roides, ne ſont pas propres à ſe lier, à s'attacher enſemble, par le ſeul attouchement; ils ne ſauroient ſe toucher que par de petites ſurfaces, &, pour ainſi dire, par quelques points. Si on remplit d'eau les interſtices qu'ils laiſſent entre eux, leur liaiſon en ſera augmentée, parce que les parties de l'eau tiennent plus les unes aux autres que ne font celles de l'air: mais elle ne ſera augmentée que de ce que l'eau a de liaiſon ou de viſcoſité, & cela ne va pas loin. Auſſi ſi l'on veut pétrir cette maſſe, dont les grains ſont ſi mal liés, il s'y fera des fentes, elle ſe ſéparera en pluſieurs parcelles. Les déplacemens des grains occaſionneront ceux de l'eau; dans les

endroits où les grains se trouveront séparés des autres par trop d'eau, & dans les endroits où ils se toucheront moins, il se fera des séparations.

Remplissons un vase d'une Terre bien seche, réduite en poudre. Pressons cette poudre autant qu'il est possible; les grains sont alors à peu près dans le même cas où seroient ceux d'une poudre de Sable. Mais si nous arrosons ensuite cette poudre d'eau, nous allons avoir des effets fort differens de ceux qui arriveroient, si nous arrosions de même du Sable, & dont la cause est dûe à la premiere proprieté de la Terre que nous avons établie; savoir, à ce qu'elle est spongieuse, à ce que ses grains se laissent pénétrer & gonfler par l'eau. L'eau qui n'iroit que dans les intervalles que les grains de Sable laissent entre eux, s'insinue dans les grains mêmes de Terre, elle fait effort pour les gonfler en tous sens; ils vont chacun s'étendre, & les côtés où ils s'étendront le plus, ce seront ceux où ils trouveront moins d'obstacles à leur extension, c'est-à-dire, vers les endroits où ils ne s'entretouchent pas. En se gonflant, ils vont à la rencontre les uns des autres; bien-tôt les attouchemens des grains, les engrénemens des parties des uns dans celles des autres, seront considerablement augmentés, ou, ce qui est la même chose, la liaison, la ténacité de la masse va être augmentée, car chaque grain est contraint ici à s'appliquer contre son voisin, par une force pareille à celle qui agit dans les cordes que l'eau pénétre.

Si

Si on vient dans la ſuite à faire ſecher cette maſſe, il arrivera même que ſes grains, redevenus ſecs, tiendront beaucoup plus enſemble qu'ils n'y tenoient avant qu'ils euſſent été mouillés. L'eau les a engrénés les uns dans les autres, & l'engrénement n'a pas été détruit pendant qu'elle s'eſt évaporée; la preſſion de l'air extérieur a tenu unis des grains qui ne tendoient pas à ſe ſéparer. Notre maſſe de Terre ſeche ſera plus dure que lorſqu'elle étoit mouillée, tout au contraire de ce qui arrive à un tas de grains de Sable. L'état de chaque grain de Sable eſt le même, ſoit que le tas qu'ils compoſent ſoit mouillé, ſoit qu'il ne le ſoit pas. Il n'en eſt pas de même de celui de chaque grain de Terre dans ces deux differentes circonſtances; la maſſe qu'ils compoſent ne ſauroit être mouillée, qu'ils ne ſoient chacun mouillés intimement. Nous avons tâché de donner quelque idée de la tiſſure que nous leur concevons, en les comparant à de petits fragmens d'éponge, de papier, à de la poudre de bois; ils boivent l'eau comme ces ſortes de matieres, & il eſt à croire auſſi que quand ils en ſont imbibés, ils ont comme elles une ſoupleſſe qui leur manque lorſqu'ils ſont plus ſecs. Quand l'eau a donné à la Terre la conſiſtance d'une pâte médiocrement molle, elle a ramolli chacun de ſes grains: l'eau, plus molle que le corps dans lequel elle s'introduit, doit ramollir ce corps, ſi elle en augmente les dimenſions préciſément de la quantité du volume qu'elle y va occuper, au-lieu qu'elle augmenteroit la dureté du corps où elle s'introduiroit ſans le

le dilater, parce qu'elle y occuperoit la place d'une matiere plus ténue. Le papier, le bois mouillés nous donnent un exemple de ce qui arrive dans le premier cas, & le tas de Sable nous en donne un de ce qui arrive dans le ſecond.

La principale cauſe de la ductilité qu'a la Terre ramollie par l'eau, doit, à mon ſens, être tirée de ce qu'alors chacun de ſes grains ont une ſoupleſſe qu'ils n'avoient pas auparavant; je n'exclus pas pourtant l'eau des vuides que les grains peuvent laiſſer entre eux. Je comprends même que lorſqu'on vient à preſſer la maſſe, que lorſqu'une force tend à faire mouvoir une partie des grains, que l'eau qui eſt dans les interſtices qu'ils ne rempliſſent pas, aide à les faire gliſſer. Mais je conçois que ces grains, qui en changeant de place, cedent à la force qui tend à les faire aller en avant, changent en même tems de figure pour s'appliquer contre les grains qu'ils rencontrent. Cet effet eſt une ſuite néceſſaire de leur ſoupleſſe; dès qu'ils portent à faux quelque-part, dès qu'ils ne touchent pas ſuffiſamment leurs voiſins, ils ſont obligés de ceder juſqu'à ce qu'ils ayent trouvé un appui qui les mette en état de réſiſter à la force qui agit contre eux. Si un gâteau de pâte ne touchoit pas par-tout un plateau ſur lequel il ſeroit poſé, on l'obligeroit à le toucher partout, ſi on le preſſoit au-deſſus des endroits où il n'y étoit pas appliqué. Ce qui arrive ſenſiblement à toute la maſſe de pâte, eſt ce qui arrive continuellement à ſes grains, quand on la manie ou preſſe pour lui faire changer

de

de forme. Les grains ſouples & hors d'état de ſe ſoutenir, s'ils ne ſont appuyés de toutes parts, obeïſſent juſqu'à ce qu'ils ſe ſoient preſque moulés ſur leurs voiſins. Tout ſe paſſeroit differemment, ſi les grains étoient roides, inflexibles comme des grains de Sable; quelques points d'appui ſuffiſent à ces derniers, la force qui agit contre eux n'a d'autre effet que de les faire mouvoir. Quand la maſſe qu'ils formoient, auroit été ſans gerçures, il s'y en feroit dès qu'ils ſeroient forcés à ſe déplacer, parce qu'alors les vuides ceſſeroient bien-tôt d'être auſſi regulierement diſtribués.

On pourroit croire que la figure ſeule des parties ſuffiroit pour expliquer la ductilité de la Terre mouillée; qu'en leur en imaginant une qui leur permît de s'appliquer exactement les unes contre les autres, qu'on auroit une cauſe de leur ténacité, & d'une ténacité qui ſe conſerveroit pendant qu'elles ſeroient miſes en mouvement, ou, ce qui eſt la même choſe, pendant qu'on feroit changer de forme à la maſſe qu'elles compoſent. Mais quelles figures plus favorables leur pourroit-on imaginer que celle de lames bien polies? Avec de pareilles lames, on pourroit faire un tout dont les parties ſeroient liées, tant que l'arrangement régulier des lames ſubſiſteroit. Mais cet arrangement ſeroit bien-tôt troublé, ſi on venoit à paſtrir la maſſe; les lames ſe trouveroient bien-tôt differemment inclinées les unes par rapport aux autres; & alors plus de liaiſon, plus de ductilité,

lité, si la souplesse de chacune des lames ne donnoit l'une & l'autre.

Les Gyps, les Talcs fournissent une preuve qui confirme fort le raisonnement précédent. On sait qu'une des proprietés de l'une & de l'autre de ces matieres est de se diviser en feuilles, qui elles-mêmes se subdivisent en d'autres feuilles, jusqu'à un terme que nous ignorons: de sorte que si on pulverise du Gyps ou du Talc, la poudre ne sera pas composée, comme celle du Sable, de grains qui auront à peu près d'égales dimensions en differens sens; mais elle sera composée de petites lames qui auront beaucoup moins d'épaisseur qu'elles n'ont de largeur & de longueur. Cependant quelque fines qu'ayent été les poudres de Talc & de Gyps, quand elles ont été humectées par l'eau, elles ne m'ont jamais donné ni une pâte liée, ni une pâte ductile. Aussi ces pâtes, comme celles du Sable pulverisé, se sechent sans perdre rien de leurs dimensions; preuve que l'eau ne pénétre pas plus dans l'intérieur des grains de Gyps & de Talc que dans celui des grains de Sable; & preuve encore, que la figure la plus favorable des parties d'une poudre ne suffit pas pour que cette poudre détrempée par l'eau devienne une pâte ductile, lorsque l'eau ne peut pas pénétrer & ramollir chaque grain. Les Métaux ne doivent aussi leur ductilité qu'à la souplesse de leurs parties; il y en a même, comme le Fer, & l'Acier surtout, qui ne sont bien ductiles que lorsqu'ils sont extrêmement chauds; il est nécessaire que le feu ramollisse des parties qui ont trop de

de roideur lorſqu'elles ſont froides. En un mot, la ductilité demande que les parties qui compoſent un tout, puiſſent elles-mêmes changer aiſément de figure, & que pendant qu'elles en changent elles reſtent toujours appliquées les unes contre les autres.

Les Terres, les plus Terres, ſi je puis me ſervir de ce terme, telles que ſont les Glaiſes, ont une proprieté bien connue, celle de retenir l'eau; elle ne peut les traverſer. C'eſt à cette proprieté de la Glaiſe à qui nous ſommes redevables des eaux de tant de Sources & de tant de Puits. Que la Glaiſe ſe laiſſe mouiller par l'eau, & que cependant elle ne permette pas à l'eau de la percer, que l'eau ne puiſſe ſe filtrer au travers d'un lit de Glaiſe qui eſt bien humecté, c'eſt un fait ſingulier, & dont l'explication pourroit embaraſſer qui ignoreroit la proprieté que nous avons reconnue dans nos grains de Terre, de ſe laiſſer pénétrer & gonfler par l'eau. Celle qui arrive ſur une maſſe de Glaiſe ſeche, trouve des grains prêts à la recevoir, elle peut même alors trouver des paſſages entre les grains, qui lui permettent d'avancer juſqu'à une certaine profondeur. Mais bien-tôt elle va elle-même ſe boucher ces paſſages. A meſure qu'elle s'introduit dans les grains, elle les diſtend, elle les gonfle, & les force à s'appliquer exactement les uns contre les autres.

Rohault, qui apparemment n'avoit pas aſſez fait d'attention à notre premiere proprieté de la Terre, attribue cet effet à une autre cauſe qui ſemble d'abord ſuffiſante. Il imagine que l'eau qui pénétre la Glaiſe, entraine

traine avec ſoi les grains les plus fins, qu'elle les dépoſe dans les paſſages, & qu'ainſi peu à peu elle les bouche. Mais ce ſentiment, auquel on ſeroit peut-être forcé de s'en tenir, ſi on n'en avoit pas un plus probable, ſeroit combattu par bien des difficultés. Si on humectoit un morceau de Glaiſe ſeche par la ſeule vapeur d'un air humide, il ſeroit difficile de concevoir qu'il s'y fît des déplacemens de grains de Terre; cependant la Glaiſe humectée ainſi, ſeroit capable d'arrêter l'eau, comme celle qui auroit été arroſée par une quantité d'eau conſiderable: il s'enſuivroit que dans un lit de Glaiſe de quelques pieds d'épaiſſeur, ſur lequel l'eau coule, que le paſſage n'eſt bouché à l'eau qu'à une certaine profondeur de ce lit, & qu'elle en pénétre aiſément les premieres couches. Il ne lui eſt bouché, le paſſage, que où il y a eu aſſez de parties fines portées & dépoſées; ces parties plus fines ont été priſes des couches les plus proches de la ſurface; les premieres couches devroient donc laiſſer paſſer l'eau, comme le font des couches de Sable. Or l'expérience démontreroit aiſément le contraire. Enfin un morceau de Glaiſe qui a une fois arrêté l'eau, lorſqu'il auroit été ſeché, & qu'on viendroit à en verſer deſſus, l'arrêteroit, lorſque l'eau ſeroit arrivée au premier endroit; ce qui n'eſt pas.

Ni la ductilité de la Terre, ni ſa proprieté de ſe raccourcir en ſe ſechant, ne peuvent donc être expliquées par la ſeule petiteſſe de ſes grains. Il faut de plus imaginer chacun de ſes grains ſpongieux & ſouples. La peine

peine que j'ai eu à croire la premiere hypothese insuffisante, l'envie que j'ai eu plusieurs fois d'y revenir, me fait penser qu'on ne sauroit trop bien établir que l'un & l'autre effet ne sauroient uniquement dépendre de la finesse des grains. Les Sels concrets paroissent propres à le bien prouver. Il n'en est peut-être aucun qui ne soit composé de parties plus ténues que celles des Terres ordinaires; du moins est-il sûr que leurs parties, qui se soutiennent dans l'eau, pendant que celles de la Terre ne s'y soutiennent pas, sont prodigieusement fines; cependant je ne connois point de Sel, qui étant imbibé d'eau fasse une pâte ductile, ni dont l'espece de pâte qu'on en aura faite se raccourcisse en sechant. J'ai formé des lames avec differens Sels réduits en poudre, & ensuite arrosées d'eau legerement, aucune de ces lames ne s'est raccourcie sensiblement pendant qu'elle s'est sechée. J'ai essayé de la sorte, de l'Alun, du Vitriol, du Borax, du Sel de Soude, &c.

Les caracteres particuliers que nous avons assignés au Sable & à la Terre, ne sont pas uniquement propres à nous donner des idées plus distinctes de l'une & de l'autre de ces matieres, que celles qu'on s'en étoit faites jusqu'ici; ces caracteres nous aideront extrêmement à démêler la composition de bien des Mineraux. Il n'en est point, dont la Terre & le Sable ne fassent partie. Entre les differentes classes des matieres minerales, la plus étendue, & celle qui offre de plus belles variétés, est celle des Pierres; une grande partie des genres qu'elle comprend, ne sont

ſont faits que d'un alliage de Sable & de Terre. C'eſt une idée que nous déveloperons plus au long dans quelques Mémoires que nous avons à lire ſur la formation des Pierres, & ſur leurs diviſions en claſſes, en genres & en eſpeces; nous en avons déja donné une ébauche, dans un Mémoire imprimé parmi ceux de 1720, où nous avons tâché d'expliquer la formation des Cailloux. Nous avons dit alors, que dans certaines circonſtances, l'eau charrie une matiere ſablonneuſe qui eſt ſi fine qu'elle nage dans l'eau qui la tranſporte, qu'elle y eſt comme diſſoute. Que l'eau pourtant dépoſe cette poudre ſablonneuſe & cryſtalline dans pluſieurs Terres ou Sables au travers deſquels elle ſe filtre. Que cette matiere dépoſée entre de purs Sables, en lie les grains enſemble. Que les grains ſenſibles d'un Sable ainſi liés, forment des Pierres de Grès. Que quand la même matiere ſe dépoſe entre les molécules de Terre, & qu'elle les lie, qu'elle compoſe des Pierres communes, telles que nos Pierres à bâtir, qui différent entre elles ſelon la qualité de la Terre dont les grains ont été liés enſemble, & auſſi ſelon la quantité de la matiere employée à les lier. Enfin que la matiere cryſtalline introduite dans des Terres compactes, comme les Bols, les Glaiſes, &c. & dans des Pierres ſpongieuſes, formoit des Cailloux qui, dans la derniere circonſtance, étoient des Pierres, qui elles-mêmes s'étoient pétrifiées de nouveau, qui étoient devenues plus Pierre qu'elles ne l'étoient en leur premier état. Ces explications ſur la nature des Cailloux,

loux, qui ne manquent pas de vraiſemblance, ſont de plus prouvées, dans le Mémoire que je viens de citer, par des obſervations très préciſes & très déciſives. Mais ni ces obſervations, ni les raiſonnemens qui les précédent, ne nous apprennent point s'il y a des Pierres où la Terre reſte ſous ſa forme de Terre; s'il y a des Pierres auſſi groſſierement conſtruites avec la Terre, que les Grès le ſont avec le Sable; ſi, comme les grains de Sable, des Grès, ſont ſimplement liés entre eux par une matiere ſablonneuſe plus fine, il y a de même des Pierres où les molécules de Terre ſont ſimplement liés entre eux par une pareille matiere cryſtalline; en un mot, ſi la Terre qui compoſe certaines Pierres a conſervé toutes les proprietés de la Terre, & ſi au contraire celle qui eſt entrée dans la compoſition de quelques autres Pierres a perdu ces proprietés, & a ceſſé d'être Terre, ou au moins une Terre qui nous ſoit connoiſſable.

Pour éclaircir la premiere queſtion, j'ai pris un morceau de Pierre d'auprès de Charenton qui ne faiſoit qu'arriver au haut de la Carriere; il étoit encore tendre & preſque mol. Je l'ai fait piler, il a preſque été réduit en une pâte médiocrement dure. J'ai lavé cette pâte pierreuſe dans une ſuffiſante quantité d'eau, & cela à diverſes repriſes. L'eau s'eſt chargée des parties les plus legeres, elle en a emporté aſſez les premieres fois pour être rendue très trouble. J'ai mis cette eau dans des vaſes, afin qu'elle y laiſſât dépoſer la matiere qu'elle avoit enlevée. Je n'ai ceſſé de

laver

laver la pâte que quand j'ai vu que l'eau qui l'avoit lavée ne se troubloit plus.

Les differens sédimens que ces operations m'ont fournis, m'ont mis en état de décider si cette espece de Pierre n'est composée que d'un Sable extrêmement fin, ou si elle est composée en partie d'une véritable Terre. Le premier, le plus simple essai que j'ai fait des premiers sédimens, auroit seul suffi pour me convaincre que ces sortes de Pierres contiennent une Terre pure. La pâte en laquelle ils ont été réduits, après que je ne leur ai laissé que l'eau nécessaire pour les tenir mols, étoit aussi ductile que celles de plusieurs Terres; plus ductile que celle de quelques Marnes. Cette matiere qui avoit la ductilité propre aux Terres, & qu'on ne trouve point aux Sables, étoit donc de la Terre, & non du Sable.

J'ai passé ensuite à l'épreuve de l'autre proprieté de la Terre, de celle de raccourcir en sechant. J'ai fait des lames de cette Terre, que j'ai mesurées exactement; je les ai laissées secher à l'ombre. Elles se sont raccourcies de 5 lignes sur 6 pouces, ce qui est un des grands raccourcissemens dont soient capables les Terres pures.

Tous mes sédimens ne se sont pourtant pas raccourcis au même point; les premiers contenoient la Terre la plus pure, & celle des derniers étoit mêlée avec beaucoup de Sable. Aussi les sédimens tirés des dernieres lotions n'étoient pas une pâte ductile, comme celle des premiers: au-lieu que les lames des premiers se sont raccourcies de 5 lignes

 sur

fur 6 pouces, celles des derniers ne fe font raccourcies que de 2 lignes fur la même longueur.

Les fédimens moyens ont eu auffi des raccourciffemens moyens entre les précédens.

Enfin le réfidu dont l'eau n'emportoit plus rien, fur lequel elle ne fe blanchiffoit pas, étoit un pur Sable.

* Nous pourrions par d'autres effais déterminer plus particulierement le caractere de la Terre contenue dans cette efpece de Pierre, déterminer de quel genre elle eft, en déterminer les proportions avec le Sable. Mais cet examen ne doit pas précéder le refte de ce Mémoire; fa place même ne fera que dans les Mémoires qui le doivent fuive. C'eft affez d'avoir vu que nos premieres proprietés de la Terre nous font connoitre qu'il y a des Pierres où elle entre fans être altérée.

La feconde queftion que nous avons faite, eft s'il y a des Pierres dans la compofition defquelles la Terre foit entrée, & où elle ne conferve plus de fes premieres proprietés de Terre, celles qui la font diftinguer du Sable. Pour la réfoudre, j'ai fait réduire des Cailloux de Marly dans la poudre la plus fine. Elle fe foutenoit dans l'eau à peu près autant de tems que s'y foutenoit la Terre tirée de nos Pierres de Charenton. Je l'ai pétrie, elle n'a eu nulle ductilité. J'ai fait des lames de cette pâte, qui ont feché fans fe raccourcir fenfiblement. Cependant ces Cailloux ont probablement eu pour bafe une Terre pareille à celle des Pierres blanches de Marly. Quand la Pierre eft devenue Caillou, la Terre a donc perdu fes proprietés, elle fem-

ſemble être elle-même devenue Caillou, Sable, &c. Mais les Pierres d'auprès de Charenton nous fourniſſent encore dequoi mieux prouver cette eſpece de transformation de la Terre. On trouve de ces Pierres qui ont été changées en Cailloux, ce ſont celles dont j'ai parlé dans le Mémoire de 1720 ſur les Cailloux, où leur métamorphoſe eſt bien prouvée. Or ces Pierres, tant qu'elles n'étoient que ſimples Pierres, contenoient une véritable Terre, comme il a été prouvé ci-deſſus. J'ai traité des Cailloux parfaits, qui devoient ſurement leur premiere origine à des Pierres communes, de la même façon que j'avois traité des Cailloux de Marly, & ils ne m'ont pas plus donné d'indices de Terre. Je dis qu'ils étoient devenus des Cailloux parfaits, parce qu'il y a des Cailloux qui donnent encore des indices de matieres terreuſes, mais ce ſont ceux dont le grain eſt le plus gros, & qui ont le moins de tranſparence.

Il réſulte de-là, qu'il y a des Pierres qui ſont une Terre dont les grains ont été liés par la matiere cryſtalline; mais qu'il y en a d'autres, qui ſont des Pierres plus parfaites, où la matiere cryſtalline a pénétré les grains mêmes de la Terre, à peu près comme on imagine que les Acides pénétrent les Alkalis: mais ces conſéquences demanderont à être plus détaillées & plus prouvées, elles doivent nous donner bien des éclairciſſemens ſur la nature des differentes Pierres, & ſur leur formation; c'en eſt aſſez ici de les avoir indiquées.

Tous ceux dont la profeſſion eſt de façonner la Terre en ouvrages, ſavent aſſez l'at-

tention qu'il faut avoir à la proprieté qu'ont les Terres ductiles de se retirer. Les Potiers de Terre, les faiseurs de Creusets, &c. savent qu'il faut faire secher lentement les vases qu'ils en ont formés, qu'autrement ils sont en risque de se fendre, avant même qu'on les expose au feu qui les doit cuire; les forces avec lesquelles differentes parties tendroient à se raccourcir, n'étant pas égales, & étant supérieures à celles qui les tiennent unies, produiroient des séparations. Si une partie est épaisse, & que l'humidité s'en échape trop brusquement, la couche la plus proche de sa surface est presque seche, pendant que les couches intérieures sont très abreuvées d'eau, ou, ce qui revient au même, la couche supérieure est devenue plus courte que celle sur laquelle elle est appliquée. Il faut donc nécessairement qu'un espace vuide tienne lieu de ce qui manque à sa longueur; elle se fend dans un, ou dans plusieurs endroits, où elle étoit plus foible; de couches en couches il en arrive de même, & alors la partie se trouve partagée par plusieurs fentes qui traversent de part en part avant même qu'elle soit absolument seche. C'est pour n'avoir pas le desagrément de voir leurs ouvrages cassés avant qu'ils soient secs, que les Ouvriers mêlent une certaine quantité de Sable avec leur Terre; ils lui en donnent ce qu'ils lui en peuvent faire porter, sans la rendre trop peu ductile. Plus le Sable fait une grande portion de la masse composée, & moins cette masse a de disposition à se retirer, moins aussi on a à craindre qu'elle seche trop promtement.

Ceux

Ceux qui font des modeles en Terre, fa-vent aussi dans quelles proportions il faut les faire plus grands que ne le doivent être les ouvrages qu'on moulera dessus, parce que ces modeles secs n'auront plus les dimensions qu'ils avoient lorsqu'ils étoient humides.

Mais il y a une circonstance importante où on n'a pas fait assez d'attention à cette propriété de la Terre, c'est dans la construction des murs de revêtemens. Ces murs qui doivent soutenir des Terrasses faites pour l'agrément, comme celles des Jardins, où les Terres d'ouvrages utiles, comme ceux des fortifications, sont de conséquence, tant par rapport à *leur usage*, que par rapport à leur prix; au moins doit-on chercher à les rendre solides, en leur donnant l'épaisseur & les talus ou fruits qui leur conviennent. Les dépenses auxquelles ils engagent, font aussi souhaiter de ne leur donner que la solidité convenable. On a eu recours à la Géometrie, pour déterminer les proportions qui leur font nécessaires; mais la Géometrie ne résout les problêmes que sur les conditions qui ont été proposées, & il n'arrive que trop souvent qu'on restraint ceux de Physique à des conditions qui en excluent d'autres que la Nature y fait entrer: ou qu'aux conditions que la Nature présente, on en substitue de totalement differentes. Par rapport à nos murs de revêtemens, on a calculé le poids qu'ils ont à soutenir pour empêcher l'éboulement des Terres. M. Couplet, qui a traité cette matiere avec plus d'étendue, de détail & d'exactitude que personne, dans plusieurs de nos der-

niers Volumes, a ſur-tout cherché à donner à ces murs toute la force néceſſaire. Pour cela il a pris l'hypotheſe où ils auroient à ſoutenir des maſſes de pur Sable; il a même imaginé les grains de Sable comme autant de petites boules. Des murs bâtis avec la ſolidité néceſſaire pour tenir ferme contre des maſſes compoſées de grains ſi roulans sembleroient avoir bien de la force de reſte, car il s'en faut beaucoup que les grains des Terres ordinaires ayent une pareille diſpoſition à rouler. Nous voyons tous les jours de longues & hautes maſſes de Terres coupées à pic, pour faire des chemins, ou des excavations, dont il ne s'éboule, au bout d'une année, que quelques hottées de Terre. Si des murs euſſent été élevés le long de ces Terres, le poids qu'ils auroient eu à arrêter, auroit égalé à peine celui que peut porter un homme robuſte. Ce poids même n'auroit jamais été à ces hottées de Terre qui ont été détachées; ce n'eſt que par petites parcelles que tombe ſouvent cette Terre qui s'accumule avec le tems à une quantité un peu conſiderable; les ſecondes parcelles qui ſe détachent, ne ſe détachent, & n'ont de diſpoſition à ſe détacher, que parce que les premieres ſont tombées; ſi celles-ci euſſent été ſoutenues, les autres n'euſſent jamais fait d'effort pour ſortir de leur place. Cependant, ſi on conſtruit des murs contre de pareilles maſſes de Terre, il leur faut bien une autre ſolidité que celle qui leur eût ſuffi, s'ils euſſent été bâtis en des endroits où ils euſſent été iſolés de toutes parts; ſans quoi ils ne ſub-

subsistent pas longtems dans leur à-plomb, bien-tôt quelques-unes de leurs portions se renflent, présentent des ventres. Le peu de Terre qui tend à tomber, soit verticalement, soit selon des lignes inclinées, ne semble pas capable de produire de si grands effets. Une force autrement puissante n'agit aussi que trop souvent contre ces murs, & toute sa direction tend à les pousser horizontalement. Cette force est celle qui fait prendre aux Terres seches une augmentation de volume à mesure qu'elles s'imbibent d'eau, qui les contraint de se renfler; c'est une force pareille à celle qui agit sur les cordes mouillées. Nous avons déja dit que nous ne connoissons pas la mesure de cette derniere, mais nous savons qu'elle est prodigieuse, qu'elle met une corde en état d'enlever tout poids qui ne sera pas capable de la rompre; ou pour comparer la force de notre Terre qui se renfle avec une autre qui semble plus analogue, ou plutôt qui est précisément la même, elle est pareille à celle du bois qui se renfle. Or on sait que des coins de bois, engagés secs entre d'épaisses roches, lorsqu'ils viennent à être imbibés d'eau, font un effort pour se renfler, qui force les roches à se fendre, à éclater, qui les détache, & les souleve: & c'est l'expédient le plus commode pour détacher ces lourbes masses de Pierres dont on fait les Meules de Moulin. Si donc nous considerons ce qui va arriver à une masse de Terre bien séche & bien compacte d'ailleurs, appliquée contre un mur, lorsque l'eau la pénétrera, nous devons nous repré-

ſenter les efforts qu'elle va faire pour s'étendre, comme capables de vaincre les plus puiſſans obſtacles.

Il eſt vrai que ce qu'il n'eſt pas permis, à la Terre qui s'imbibe, de prendre d'accroiſſement, de dimenſions dans un ſens, elle le prend dans un autre. Si la Terre qui, ſeche, rempliſſoit un vaſe, vient à s'humecter, en ſe gonflant elle s'élevera au deſſus des bords du vaſe, qui eſt le ſeul côté où il lui ſoit permis de s'étendre: de même ſi les obſtacles qui contiennent une maſſe de Terre, des murs, par exemple, s'oppoſent à l'extenſion qu'elle veut prendre dans une direction horizontale, elle ſera forcée à s'élever. Mais auſſi, quels terribles efforts le mur a-t-il à ſoutenir dans quelques circonſtances! Qu'un lit de Terre ſeche, poſé à 10 pieds de profondeur, vienne à être pénétré par l'eau, l'effet de la force qui le porte à s'étendre horizontalement, ne ſera détruit que quand l'obſtacle qui s'oppoſe à cet effet ſera plus fort que la réſiſtance de la maſſe de la Terre ſupérieure à être ſoulevée. Il faut donc que cette réſiſtance du mur tienne alors contre le poids d'une couche de Terre de 10 pieds d'épaiſſeur ſur une longueur égale à la ſienne, & ſur une largeur plus ou moins grande, ſelon l'étendue du lit de Terre dans ce ſens.

L'action de la couche de Terre, qui ſe dilate, contre le mur, n'eſt pas ſeulement proportionnée au poids de la maſſe qu'il lui faut ſoulever pour ſe dilater, elle eſt encore augmentée par la réſiſtance qui vient de la téna-

ténacité des parties de la Terre les unes avec les autres. La force des coins mouillés, qui enleve des portions d'un rocher, n'eſt pas ſeulement égale au poids de ces portions; avant de commencer à les ſoulever, elle a eu à vaincre l'engrénement, l'adhéſion de cette partie avec le reſte, il a fallu la détacher dans le premier inſtant qu'elle a été ſoulevée. Les parties de la Terre ne ſont pas liées entre elles auſſi ſolidement que le ſont celles d'une roche: leur ténacité eſt pourtant conſiderable dans certaines Terres. D'ailleurs la couche qui commence à ſe renfler, ne ſe renfle pas par-tout également, dès-lors elle ſouleve plus la maſſe qu'elle porte, en certains endroits que dans d'autres, & de-là il ſuit qu'il faut vaincre la réſiſtance de la ténacité de la Terre en bien des endroits. Une expérience, que je vais rapporter, prouve combien il faut avoir de conſideration à cette ténacité, & que le poids à ſoulever n'eſt pas à beaucoup près la meſure de l'effort néceſſaire.

J'ai fait une lame de Terre glaiſe, qui, quand elle a été ſeche, a eu environ 9 pouces de longueur, un de largeur & 5 lignes d'épaiſſeur en quelques endroits, & dans d'autres 6. Je l'ai poſée à plat ſur le mur d'appui d'une fenêtre, de façon qu'un de ſes bouts touchoit un des murs montans de la même fenêtre. J'ai appliqué contre ſon autre bout une maſſe de Fer, dont il eſt inutile de déterminer le poids abſolu; mais ce que j'ai cherché à déterminer, & qui étoit néceſſaire, c'eſt le poids capable de faire

gliffer cette maffe horizontalement. L'expérience m'apprit qu'il devoit être de 10 livres. Contre les côtés de la lame de Terre j'ai pofé deux barres de Fer, qui comme deux règles les touchoient tout du long. Ainfi cette lame de Terre étoit arrêtée par les deux côtés & par les deux bouts, le deffus feul étoit libre & à découvert. En cet état je l'ai arrofée d'eau, qui n'a pas été longtems à la pénétrer. Je voulois éprouver fi l'augmentation du volume fe feroit toute en hauteur, lorfque dans les autres fens il y avoit des obftacles à vaincre plus confiderables que le poids de la Terre. Je n'ai point été attentif à obferver l'augmentation qui auroit pu fe faire en largeur, une lame fi étroite, eût-elle été libre, n'en eût pas pris une bien fenfible en ce fens; mais j'ai obfervé foigneufement s'il s'en feroit en longueur, & j'ai vu qu'il s'y en eft fait une. La maffe de Fer, qui réfiftoit de 10 livres, a été portée à environ 2 lignes $\frac{1}{2}$ par-delà l'endroit où je l'avois placée. Cependant cette réfiftance de 10 livres étoit une force beaucoup plus confiderable que celle qu'il eût fallu pour foulever toute la Terre qui avoit agi; cette Terre ne pouvoit pas pefer plus de quelques onces. L'engrénement des parties les unes dans les autres, leur difpofition à s'étendre dans une certaine direction, a donc mis la force dilatative en état d'agir efficacément contre le poids qui s'oppofoit à l'allongement. Il eft vrai pourtant que l'allongement n'a pas été auffi confiderable qu'il l'eût été, fi la bande n'eût pas trouvé d'obftacle à repouffer; elle

fe

se fût alors allongée de plus de 4 lign. $\frac{1}{2}$, au lieu qu'elle ne s'est allongée que de 2 lign. $\frac{1}{2}$.

Quand des murs sont appuyés contre des Terres compactes, seches, & que l'eau parvient à les pénétrer jusqu'à une certaine profondeur, ces murs ont donc besoin d'une prodigieuse force pour se soutenir. Aussi l'expérience a-t-elle appris que les tems à craindre pour les murs de Terrasses sont les tems de pluyes abondantes; alors les Terres sont imbibées à une profondeur considerable, d'une eau qui met en action des forces immenses. Les pluyes d'orage qui viennent après une longue secheresse, sont par-là extrêmement à craindre.

Si la force de la dilatation de la Terre va jusqu'où nos raisonnemens & l'expérience précédente semblent la porter, on sera étonné qu'il y ait des murs de revêtemens qui puissent se soutenir pendant une année entiere. Il est vrai aussi qu'il leur faudroit une épaisseur prodigieuse pour soutenir la poussée des Terres qui se dilatent, si bien des causes ne concouroient à en affoiblir l'effet. Les Terres qu'ils ont à arrêter se dilatent d'autant moins qu'elles sont plus sablonneuses; pendant qu'il est ordinaire de trouver des Terres grasses, qui étant seches, ont dans chaque dimension $\frac{1}{13}$, $\frac{1}{14}$, $\frac{1}{12}$ de moins que lorsqu'elles sont humides; c'est-à-dire, des Terres que l'humidité étend de $\frac{1}{13}$, ou même de $\frac{1}{12}$ en tout sens; il est ordinaire aussi de trouver des Terres sablonneuses que l'humidité n'allongera que de $\frac{1}{29}$, ou $\frac{1}{36}$, & quelquefois moins.

Les Terres les plus grasses & les plus compactes, celles dont l'eau peut augmenter le plus les dimensions lorsqu'elle les pénétre, sont aussi les plus difficiles à pénétrer ; & lorsqu'elles ont été une fois imbibées d'eau, elles la laissent échaper difficilement ; de sorte que celles qui se trouvent à une certaine profondeur, ne deviennent jamais seches à un point où leur force de se dilater puisse ensuite être mise en jeu dans toute son étendue.

Il est sur-tout à remarquer que si un mur de revêtement étoit construit dans une circonstance où la masse de Terre qu'il a à arrêter, est aussi imbibée d'eau qu'elle le peut être, qu'il n'auroit jamais rien à craindre des effets de cette Terre pour se dilater, si cette masse de Terre restoit précisément la même. Quand cette Terre se secheroit, elle se retireroit un peu du mur ; il s'y feroit des fentes, des crevasses en une infinité d'endroits, qui seroient les places nécessaires pour la recevoir, lorsqu'elle viendroit à se gonfler de nouveau : mais malheureusement, les vuides des fentes, des crevasses, faites par la Terre qui se retire, ne se conservent pas dans leur entier. Les mouvemens des hommes & des animaux, le vent, la pluye, y portent des corps qui les remplissent en partie ; de sorte que quand la Terre vient à être imbibée d'eau, elle ne trouve plus pour se loger ces mêmes places qu'elle avoit abandonnées en se sechant, ou au moins elle ne les trouve plus en leur entier ; & c'est proportionnellement à ce qu'elle est mise plus à

l'étroit

l'étroit, qu'elle fait des efforts contre les murs qui s'oppofent à fa dilatation. Il réfulte pourtant de-là, que la circonftance la plus avantageufe pour conftruire des murs de Terraffe, eft celle où les Terres, le long defquelles ils font élevés, font le plus abreuvées d'eau qu'il eft poffible.

Tout ce que nous venons d'obferver prouve que l'épaiffeur qui fuffiroit à des murs de revêtemens oppofés à certaines Terres, ne fuffiroit pas à ceux qui feroient oppofés à d'autres Terres. Les Terres les plus à craindre pour eux, font celles qui joignent à la qualité de fe dilater beaucoup, celle de fe laiffer aifément pénétrer par l'eau, & de laiffer évaporer aifément l'eau dont elles ont été pénétrées. Elles font alors fujettes à de plus fréquentes alternatives de contraction & de raréfaction, & à des alternatives plus confiderables. Les differentes épaiffeurs qui conviennent à differens murs de revêtemens, felon la qualité des Terres qui agiffent contre eux, ne feroient peut-être pas aifées à déterminer. Des expériences fur les extenfions dont font fufceptibles differentes Terres, aideroient pourtant à établir quelques règles, à donner des limites entre lefquelles on pourroit fe tenir. Nous rapporterons dans la fuite un grand nombre d'expériences fur les dilatations des differentes Terres, qui pourront aider à établir ces règles qui nous paroiffent à defirer.

Une remarque, qui d'avance me paroît effentielle, c'eft que plus il y aura de gravois, de pierrailles amoncelées entre le mur

& la maſſe de Terre, & moins la pouſſée de la Terre ſera à craindre; on lui ménagera par-là des vuides qu'elle pourra occuper lorſqu'elle ſe gonflera: des gravois amoncelés dans la maſſe même de la Terre n'y pourroient produire qu'un utile effet. Du reſte je ne me ſuis pas propoſé de rechercher ici tout ce qui conviendroit pour aſſurer la durée des murs de revêtemens: j'ai ſeulement voulu faire remarquer qu'il importoit, quand on les conſtruit, de faire attention à la proprieté qu'ont les Terres de ſe gonfler lorſqu'elles s'imbibent d'eau, & que c'eſt une attention, toute importante qu'elle eſt, que je ne ſache point qu'on ait eue juſqu'ici.

Nous ne nous ſommes attachés encore qu'à conſiderer les deux proprietés de la Terre qui la diſtinguent des Sables & de tous les Mineraux qui nous ſont connus; auſſi ne l'avons-nous encore regardée que ſelon des vues très générales. Nous en ferons dans la ſuite un examen plus particulier; les varietés qu'elle nous offre, méritent chacune de l'attention; elles nous montrent de la Terre ſous bien des apparences differentes. La plupart de ces varietés ont été remarquées par ceux qui aiment l'Hiſtoire-naturelle, mais on a négligé d'en faire uſage pour bien caractériſer les differentes ſortes de Terres; dans les Ouvrages où il eſt fait mention de quelque eſpece de Terre, il nous eſt ordinairement difficile de démêler à laquelle de celles que nous connoiſſons, elle doit être rapportée. Nous avons donc cru qu'il ſeroit utile à l'Hiſtoire-naturelle, à la Phyſique & aux Arts, de diſtribuer les dif-

differentes Terres en classes, ou en genres premiers, en genres seconds, & en especes. Les premieres divisions doivent être tirées en partie des deux premieres proprietés qui nous ont tant arrêté. Mais les caracteres des genres subalternes & des especes seront fournis par des differences propres à chacun de ces genres, ou à chacune de ces especes.

Des sources de differences se présenteront en nombre, selon les rapports sous lesquels nous considererons les Terres. Quoique communément elles soient faites par grains, elles ne sont pas composées de grains également fins. Il y en a qui au-lieu d'être un amas de grains, dont on n'apperçoit pas l'arrangement, sont composées de feuilles aussi distinctes que celles des Ardoises. Les Peintres savent combien est grande la varieté des couleurs des Terres, & c'est une connoissance qu'ils mettent à profit. L'action du feu sur les Terres nous fait voir combien elles different les unes des autres. Il y en a qui se vitrifient plus aisément qu'aucune matiere à nous connue; d'autres ne sont presque pas vitrifiables, elles se soutiennent contre la plus violente action du feu de nos fourneaux: il y en a que le feu calcine, au-lieu de les vitrifier. Quand quelques-unes ont souffert le feu, qu'elles sont devenues ce que nous appellons de la *Terre cuite*, elles sont rouges; d'autres alors sont blanches; d'autres sont grises. Il nous suffit d'indiquer actuellement ces sources de varietés: mais il y en a deux autres auxquelles nous nous arrê-

rêterons un peu plus, parce qu'on ne les a pas, ce me semble, assez bien remarquées.

Je veux d'abord parler de l'effet des Acides sur les Terres. En général, elles sont regardées comme des matieres très alkalines, & des plus alkalines. Aussi des Acides foibles, tels que le Vinaigre, versés sur quantité de Terres, y excitent une fermentation subite, accompagnée d'une ébullition considerable. J'ai observé que ces mêmes Acides, & même les plus violens, tels que l'Esprit de Nitre, l'Esprit de Sel, &c. versés sur d'autres Terres, n'y causent pas plus d'ébullition que l'eau simple y en causeroit; aulieu qu'alors les premieres Terres se couvrent sur le champ d'une écume épaisse, qui s'éleve haut, à peine peut-on observer quelques petites bulles d'air qui s'échapent des dernieres. Les Esprits acides ne viennent gueres à bout de ramollir plus vîte les Terres avec lesquelles ils ne bouillonnent pas, que feroit l'eau commune.

La maniere dont les Acides agissent sur la plupart des Terres sur lesquelles ils peuvent le plus, est differente de celle dont ils agissent sur les Métaux. Ils produisent dans les Terres de plus promtes ébullitions, mais leur action se termine presque là; je veux dire, qu'au-lieu que les liqueurs acides se saisissent des Métaux avec qui elles ont fermenté, qu'au-lieu qu'elles les tiennent suspendus, qu'elles se les approprient, que les Acides n'enlevent la Terre que pour la laisser précipiter peu après.

II

Il nous reſte encore à examiner une proprieté des Terres qu'on ne trouve ni aux Cryſtaux, ni aux Talcs, ni aux Gyps, ni aux Sables parfaits, c'eſt-à-dire, comme nous l'expliquerons ailleurs au long, aux Sables qui ſont purement Sables, qui ne ſont pas des compoſés où la Terre entre pour quelque choſe. Cette proprieté eſt d'avoir de l'odeur. Toutes les Terres ſont capables de faire une impreſſion ſenſible ſur notre odorat, & il y en a de très communes qui en peuvent faire une extrêmement forte. Cependant c'eſt une proprieté de la Terre à laquelle on ne paroît pas avoir fait aſſez d'attention, & à laquelle même on n'a preſque pas pris garde; auſſi ne ſe fait-elle appercevoir que dans quelques circonſtances, qui ſont rarement celles où ceux même qui ſont capables d'obſerver examinent la Terre. Quand on en prend un morceau entre les mains pour l'examiner, il eſt ordinairement ſec; alors les Terres les plus capables de donner de l'odeur, ne ſentent rien, ou preſque rien. Mais qu'on mouille legerement ce morceau de Terre, qu'on ne le mouille qu'autant qu'il faut pour le pétrir en pâte ferme, & que quelques inſtans après on l'approche du nez, il y a telle Terre alors qui fera ſentir une odeur forte & pénétrante. Si au-lieu d'humecter ſimplement la même Terre, on la noye d'eau, ſi on en fait une pâte trop liquide, elle ne donnera qu'une odeur beaucoup plus foible: l'odeur qui s'en exhalera, n'aura de la force que quand la pâte, devenue épaiſſe, commencera à ſecher. Une autre circonſ-

conſtance encore a empêché de faire attention aux odeurs des differentes Terres, c'eſt que leur atmoſphere ne s'étend pas loin. Un morceau de Terre qui eſt capable d'affecter, même trop fortement, notre odorat, n'étant éloigné du nez que de deux ou trois pouces, n'y fera aucune impreſſion ſenſible, ſi on l'en éloigne d'un pied, ou davantage.

Si la proprieté de répandre de l'odeur eſt commune à la Terre avec un grand nombre d'autres corps, la circonſtance où elle en donne le plus, lui eſt particuliere, ou preſque particuliere. Quantité de corps n'ont de l'odeur pour nous que quand ils ſont échauffés, & quelques-uns en ont d'autant plus qu'ils ſont plus échauffés; il faut que le feu aille juſqu'à en détruire d'autres pour en faire ſortir des odeurs. Les Cheveux, la Corne, le Cuir, répandent quand ils ſe brûlent des odeurs très fortes; la Corne & les Cheveux ne ſentent rien en toutes autres circonſtances; les Pyrites, le Cobolt, & bien d'autres matieres minerales, réduites ſimplement en poudre, ne ſentent rien, ou ſentent peu. La poudre des premiers, jettée ſur des charbons allumés, répand une forte odeur de Soufre, & celle de la ſeconde matiere répand une deſagréable & dangereuſe odeur d'Ail. Les Terres qu'on fait cuire donnent auſſi de l'odeur, mais une odeur très differente de celle qu'elles ont étant humectées, & bien moins forte. Il y a des fleurs dont l'odeur eſt plus ſenſible pendant la fraicheur du ſoir & du matin, que pendant la chaleur du midi; mais ſi on excepte les farines, il y a peu de ma-

matieres qui répandent plus d'odeur, quand elles ont été réduites en pâte au moyen de l'eau, que quand elles font en une poudre prefque feche.

Nous ne favons exprimer l'efpece de fentiment que produit en nous une Rofe, un Oeillet, une Jonquille, que par les termes d'odeur de Rofe, d'Oeillet, de Jonquille: il ne nous eft pas poffible de faire connoitre autrement ce qui fe paffe chez nous à l'occafion de l'approche d'une Rofe, d'un Oeillet; nous ne faurions décrire nos fentimens, nous ne pouvons qu'indiquer en quels cas ils naiffent, & nous penfons qu'il en nait de femblables dans les autres en pareilles circonftances, quoiqu'il nous foit impoffible de reconnoitre fi le fentment dont ils font affectés eft précifément femblable au nôtre. En un mot, on ne fauroit donner d'idée de l'odeur d'une Rofe, à qui n'auroit jamais fenti de Rofes. Les odeurs de nos differentes Terres ont entre elles des differences comme en ont celles de differentes fleurs; mais de même il eft difficile, & fouvent impoffible, de les caracterifer. On ne peut gueres les faire connoitre que par le nom de l'odeur de la Terre même qui les donne, c'eft-à-dire, en renvoyant à fentir cette Terre, comme nous renvoyerions à fentir une Rofe celui à qui nous voudrions faire connoitre fon odeur. Les odeurs des Terres, en général, font des odeurs particulieres; il y en a pourtant quelques-unes qui reffemblent affez à d'autres qui nous font connues. Il y a, par exem-

exemple, des Terres dont l'odeur approche de celle du Poivre.

Lorſqu'il ſurvient en Eté une petite pluye, qui humecte legerement des Terres qui avoient été deſſechées pendant une ſuite de jours chauds, nous ſentons dans toutes les campagnes une odeur qui nous plait. On l'attribue ordinairement aux Plantes des Bois ou des Jardins où l'on ſe promene. Mais ſi on fait attention que les champs les plus arides, que ceux qui ne ſont couverts que d'un chaume ſec, ou de Plantes auſſi ſeches, en répandent alors une ſemblable, on penſera que la Terre même eſt la ſource de cette odeur, qui ne fait ſur nous qu'une legere & douce impreſſion, parce que notre tête eſt à une diſtance où l'atmoſphere de cette odeur ne s'étend qu'à peine, & ou au moins elle eſt très affoiblie; ſi on ſe couche ſur la Terre, on ſera bien frappé d'une odeur autrement forte.

Quand un morceau de Terre a été legerement humecté & quand l'eau dont il a été pénétré s'évapore, elle emporte donc avec ſoi, de l'intérieur de la Terre, de petits corps capables d'affecter notre odorat. J'ai voulu voir s'il ſeroit poſſible d'épuiſer cette odeur de la Terre. J'ai arroſé & fait ſecher ſucceſſivement de petits gâteaux de Terre pendant plus de quinze jours, & cela à diverſes repriſes chaque jour: à la derniere de ces expériences je n'ai point remarqué qu'aucun des gâteaux donnât moins d'odeur qu'à la premiere. S'il y a des corps dont l'odeur ſe diſſipe aiſément, il y en a d'autres qui la con-

conservent, & qui en fournissent bien au-delà de ce qu'on pourroit imaginer. Des corps parfumés de Musc en conservent l'odeur pendant des siecles.

Au reste, de ce que les differentes Terres ne donnent de l'odeur qu'après qu'elles ont été humectées par l'eau, il semble qu'on en doive conclure que la matiere qui fait les odeurs des Terres est trop pesante pour être élevée par la simple chaleur de l'air, qu'il est nécessaire que l'eau la dissolve, qu'elle s'en charge, qu'elle l'emporte ensuite avec soi. Peut-être même que l'eau ne peut pas l'emporter bien loin, & de-là vient que l'atmosphere de l'odeur des Terres n'est pas fort étendu. Il résulte encore de-là, que quand l'eau pénétre les grains de Terre, qu'elle y occasionne quelque alteration. Les bulles d'air qui sortent alors, disposent à penser qu'il s'y fait une fermentation. On pourroit cependant croire que ces bulles ne s'échapent que comme l'air s'échape d'une bouteille qu'on remplit d'eau. Mais ici il y a quelque chose de plus: dès que l'eau qui sort de la Terre est en état d'affecter notre odorat autrement qu'elle l'affectoit avant d'y être entrée, il semble qu'elle y a occasionné quelque fermentation; & si cette fermentation étoit bien prouvée, on auroit une cause très probable de l'augmentation de volume qui survient à chaque grain de Terre pendant que l'eau le pénetre. C'est ce que nous examinerons ailleurs.

SUITE DES OBSERVATIONS DE LA COMETE

Qui a commencé à paroitre à la fin de Juillet de l'année 1729.

Par M. CASSINI. *

NOus avons déja rendu compte à l'Académie des Obſervations d'une Comete qui avoit commencé à paroitre le 31 Juillet de l'année 1729, entre la Conſtellation du petit Cheval & celle du Dauphin, & que nous avions continué d'obſerver juſqu'au 10 Novembre de la même année.

Son mouvement propre, qui étoit contre la ſuite des Signes de l'Orient vers l'Occident, ſemblable à celui des Planetes ſupérieures lorſqu'elles ſont en oppoſition avec le Soleil, nous fit juger d'abord que cette Comete, qui ſe trouvoit auſſi dans la même ſituation à l'égard de la Terre & du Soleil, avoit réellement, de même que toutes les autres Planetes, un mouvement de l'Occident vers l'Orient ſuivant la ſuite des Signes ; & que ſon mouvement, rétrograde en apparence, n'étoit que l'effet du mouvement de la Terre autour du Soleil, qui étant plus promt que celui de la Comete, la laiſſoit en arriere, quoi-

* 19 Avril 1730.

quoiqu'elles s'avançassent toutes les deux du même sens. Que par conséquent le mouvement rétrograde de cette Comete paroîtroit se rallentir jusqu'à ce qu'il cessât entierement, de même qu'on l'observe dans les Planetes supérieures après qu'elles ont passé leurs oppositions ; qu'on la verroit ensuite se mouvoir dans une direction contraire, & aller, suivant la suite des Signes, avec une vîtesse proportionnée à la distance & à la situation où elle se trouveroit à l'égard de la Terre & du Soleil.

Toutes ces apparences arriverent successivement comme nous les avions prévues ; car cette Comete, après avoir passé près de la queue du Dauphin, s'avança vers l'Aigle avec un mouvement rétrograde qui se rallentit insensiblement jusqu'au 19 Octobre, après lequel on la vit aller suivant la suite des Signes, ayant parcouru 13 minutes de l'Occident vers l'Orient dans l'espace de 8 jours, depuis le 19 Octobre jusqu'au 27 du même mois.

On ne pouvoit appercevoir alors cette Comete que par le secours des Lunettes, où on la voyoit en forme d'une Etoile nébuleuse dont la lumiere étoit très foible, mais dont le diametre ne laissoit pas d'occuper au moins une minute & demie de degré de la circonference du Ciel, c'est-à-dire, qu'elle étoit encore plus grande en apparence qu'aucune des Planetes que nous appercevons dans le Ciel, à la réserve de la Lune.

Il est vrai que l'on peut attribuer la grandeur apparente de cette Comete à la chevelure qui l'environnoit, & qui se confondant

avec

avec ſon diſque, en augmentoit conſiderablement l'étendue.

Le mauvais tems qu'il fit enſuite, joint au clair de la Lune, nous fit ceſſer de voir cette Comete pendant près de quinze jours. Cependant, comme par la comparaiſon des Obſervations précédentes, nous ſavions à peu près l'endroit du Ciel où elle devoit ſe trouver chaque jour, & que ſa grandeur, qui étoit encore fort ſenſible dans le tems que nous l'avions perdu de vue, nous faiſoit eſperer qu'elle ſeroit encore viſible pendant quelque tems, nous eſſayames de la chercher le 10 Novembre, jour auquel le Ciel fut ſerein; ce qui nous réuſſit, & nous la trouvames plus avancée que le 27 Octobre d'un degré & quelques minutes ſuivant la ſuite des Signes, avec un mouvement direct qui avoit accéléré depuis les dernieres Obſervations que l'on en avoit faites.

Dans le compte que nous en rendimes à l'Académie dans la derniere Aſſemblée publique, nous promimes de donner la continuation des Obſervations que nous eſperions d'en faire dans la ſuite. En effet, quoiqu'elle eût déja paru l'eſpace de trois mois dix jours, qui eſt un intervalle plus grand que celui d'aucune Comete qui ait été obſervée depuis plus d'un ſiecle, nous avons continué de l'appercevoir encore plus de deux mois & demi juſqu'au 21 Janvier de cette année 1730, après quoi le mauvais tems & le clair de la Lune qui ſurvinrent, ne nous permirent plus de l'obſerver.

Elle étoit alors au-deſſus des Etoiles ſeptentrionales de la tête du Dauphin, & répon-

pondoit au 18me degré du Signe du Verſeau, le Soleil étant au premier degré du même Signe; ainſi elle s'approchoit continuellement, ce qui ôtoit toute eſperance de pouvoir encore l'appercevoir, parce qu'elle ſe devoit trouver alors près des rayons du Soleil où les Etoiles les plus éclatantes diſparoiſſent.

La route qu'elle avoit faite depuis que ſon mouvement apparent étoit direct, étoit à peu-près égale à celle qu'elle avoit parcouru étant rétrograde, de ſorte qu'elle ſe trouvoit répondre au même degré de l'Ecliptique où on avoit commencé à l'appercevoir, mais avec une latitude qui dans l'intervalle de 5 mois & 22 jours avoit augmenté de 14 degrés vers le Nord.

Après les premieres Obſervations que nous fimes de cette Comete, nous nous contentames de faire voir le rapport de ſon mouvement avec ceux des Planetes ſupérieures dans le tems de leurs oppoſitions avec le Soleil. Nous eſſayames même de démontrer que cette Comete étoit placée entre les orbes de Mars & de Jupiter, en ſuppoſant que ſon mouvement étoit réellement de l'Occident vers l'Orient ſuivant la ſuite des Signes.

La ſuppoſition du mouvement de cette Comete de l'Occident vers l'Orient, ſur laquelle notre démonſtration étoit fondée, pouvoit n'être pas reçue généralement de tous les Philoſophes, puiſqu'il s'eſt trouvé de notre tems, de très habiles & grands Géometres, qui ont cru que les Cometes faiſoient leur mouvement autour du Soleil indifferemment de tous les ſens. En effet, on ne peut

douter qu'on n'en ait obſervé pluſieurs, dont le mouvement apparent ait paru contre la ſuite des Signes, telles que celle de 1698, 1702 & 1706.

La Comete du mois d'Avril de l'année 1702 eſt remarquable entre les autres, en ce que ſon mouvement journalier étoit au commencement de ſon apparition de 15 degrés contre la ſuite des Signes, le lieu de la Terre étant éloigné de celui de la Comete d'environ trois Signes, qui eſt la ſituation où les Planetes paroiſſent ſtationaires.

On peut repréſenter cependant avec aſſez de préciſion ſon cours, & lui attribuer un mouvement réel ſuivant la ſuite des Signes, en ſuppoſant qu'elle étoit placée au commencement de ſon apparition beaucoup plus près de la Terre que du Soleil, ce qui d'ailleurs s'accorde aſſez bien à la rapidité de ſon mouvement apparent, qui étoit quinze fois plus grand que celui de la Terre. Car cette Comete étant au moins auſſi éloignée du Soleil que la Terre l'eſt de cet Aſtre, comme il eſt aiſé de le démontrer, il y a lieu de ſuppoſer que ſon mouvement réel à l'égard du Soleil n'étoit pas à beaucoup près ſi grand que celui que l'on y a obſervé, & que ſa rapidité apparente n'étoit cauſée que par ſa proximité de la Terre; ce qui ſe trouve d'ailleurs confirmé par la Parallaxe que Mrs. Bianchini & Maraldi y ont obſervée de 13 minutes.

On trouvera de même qu'on peut repréſenter également bien les mouvemens rétrogrades des autres Cometes dont nous venons de parler, en leur donnant un mouvement réel ſui-

ſuivant la ſuite des Signes. Mais on n'a pas jugé devoit entrer dans ce détail, qui demande trop de diſcuſſion, & qui excederoit les bornes que nous nous ſommes preſcrites pour ce Mémoire.

Ce que l'on vient d'expoſer ſuffit pour faire voir que les mouvemens de diverſes Cometes qui ont paru rétrogrades, ne peuvent point ſervir pour combattre le ſyſtême de Deſcartes & celui des Tourbillons, ſuivant leſquels les Corps céleſtes doivent ſe mouvoir tous dans le même ſens ſuivant la ſuite des Signes.

Pour nous renfermer dans ce qui regarde cette derniere Comete, nous ferons voir d'abord, que le mouvement direct que nous lui avons attribué comme étant le plus vraiſemblable, s'eſt trouvé par la ſuite de nos Obſervations, ſuſceptible d'une démonſtration exacte, que nous tâcherons d'expliquer, ſans qu'il ſoit néceſſaire d'y employer de Figures.

On ſuppoſe pour cela que les Etoiles fixes, avec leſquelles on compare les Cometes pour déterminer leur ſituation dans le Ciel & à l'égard de l'Ecliptique, ſont à une diſtance ſi grande, que le chemin que la Terre parcourt ſur ſon orbe dans l'eſpace de pluſieurs jours n'y a aucun rapport ſenſible.

Cette ſuppoſition doit être admiſe, puiſque dans les recherches les plus exactes qui ont été faites pour déterminer la diſtance des Etoiles fixes à la Terre par le moyen de ſon mouvement ſur ſon orbe annuel, l'angle que font entre elles deux lignes tirées d'une Etoile fixe à la Terre placée aux deux extrémités

 de

de cet orbe à la diſtance de plus de 60 millions de lieues, a été trouvé à peine d'une minute de degré.

Suivant ce principe, on peut conſiderer toutes les lignes tirées de la Terre en differens endroits de ſon orbe à une même Etoile fixe, comme des paralleles éloignées l'une de l'autre d'un intervalle meſuré par la quantité du mouvement de la Terre de l'Occident vers l'Orient.

S'il ſe trouve donc qu'une Comete, après avoir paſſé près d'une Etoile fixe, retourne à cette Etoile après quelque eſpace de tems, ou, ce qui revient au même, ſi elle retourne au même point de l'Ecliptique où elle étoit quelques jours auparavant, il en réſulte néceſſairement qu'elle s'eſt avancée, de même que la Terre, de l'Occident vers l'Orient, d'une quantité compriſe entre les deux paralleles tirées de la Terre au même point de l'Ecliptique, qui ſera plus ou moins grande, ſuivant la differente direction & inclinaiſon de l'orbe de la Comete.

C'eſt ce qui eſt arrivé dans le cours de nos Obſervations, pendant lequel nous l'avons vue répondre ſucceſſivement aux mêmes lieux de l'Ecliptique, où elle s'eſt trouvée dans les précédentes Obſervations. Ainſi il eſt démontré que cette Comete, rétrograde en apparence, avoit un mouvement réel de l'Occident vers l'Orient; & que par conſéquent, ſuivant ce que j'avois expoſé dans le Mémoire précédent, elle ſe trouvoit placée entre les orbes de Mars & de Jupiter.

Pour déterminer préſentement avec plus d'exac-

d'exactitude sa distance au Soleil & à la Terre, de même que la quantité, la direction de son mouvement propre, & les autres élémens de sa Théorie, nous pourrions employer la Méthode générale que nous avons proposée dans les Mémoires de l'Académie de l'année 1727. Mais comme les circonstances de cette Observation nous fournissent une Méthode nouvelle, beaucop plus simple & plus aisée, pour déterminer ces élémens, nous l'employerons ici, après en avoir donné une idée la plus sensible qu'il nous sera possible.

On choisira pour cette recherche trois Observations exactes, dont deux ont été faites lorsque la Comete s'est trouvée répondre à un même point de l'Ecliptique, & la troisieme à un autre lieu quelconque. Si ces trois Observations avoient été dirigées à un même lieu de l'Ecliptique, il est clair, par les raisons que nous avons rapportées ci-dessus, que le mouvement de cette Comete auroit été mesuré par l'intervalle compris entre les lignes tirées de la Terre à ce même point, que l'on peut regarder comme paralleles entre elles ; ainsi, connoissant la direction & l'inclinaison de la route de la Comete, de même que l'intervalle entre ces paralleles, qui est mesuré par le mouvement de la Terre sur son orbe, on trouveroit la quantité du mouvement de la Comete, mais non pas sa distance à la Terre, que l'on pourroit supposer telle que l'on voudroit.

Mais si la ligne tirée de la Terre dans une troisieme Observation ne se rapporte pas au même lieu de l'Ecliptique où étoient les

deux autres, mais qu'elle leur ſoit inclinée, il eſt évident que la Comete a dû paſſer en deçà ou au-delà du point du concours de ces lignes, & que par conſéquent ſon inclinaiſon plus ou moins grande doit déterminer ſa véritable diſtance à la Terre.

Soit dans la Figure ci-jointe *T* & *B*, le vrai lieu de la Terre ſur ſon orbe annuel dans deux differentes Obſervations. *TC*, *BR*, deux lignes tirées de la Terre au vrai lieu de la Comete que l'on ſuppoſe répondre au même point de l'Ecliptique, & que l'on peut regarder comme paralleles entre elles. *PC* la ligne tirée de la Terre à la Comete dans une Obſervation précédente. Du point *T* ſoit menée la ligne *TD* perpendiculaire à *BR* que l'on prolongera en *G*, enſorte que *TG* ſoit à *TD*, comme l'intervalle entre le tems de l'Obſervation de Comete, lorſque la Terre étoit aux points *T* & *B*, eſt à l'intervalle entre le tems de l'Obſervation, lorſque la Terre s'eſt trouvée aux points *T* & *P*. Du point *G* ſoit menée la ligne *GL* parallele à *BR* & *TF* qui rencontre *PC* au point *L*. Je dis que ſuppoſant que la Comete ait parcouru des eſpaces égaux en tems égaux ſur une ligne ſenſiblement droite, le point *L* marque le vrai lieu de la Comete réduit à l'Ecliptique, lorſque la Terre étoit au point *P*. Car ſi l'on tire du point *L* une ligne quelconque *LFR* compriſe entre les lignes tirées de la Terre au lieu de la Comete dans les trois Obſervations, à cauſe des paralleles *GL*, *BR*, *TF*, on aura *LF* à *RF*, comme *TG* à *TD*, c'eſt-à-dire, par la conſtruction, comme

me l'intervalle entre la premiere & la feconde Obfervation eft à l'intervalle entre la feconde & la troifieme; & pár conféquent le point L marquera le vrai lieu de la Comete réduit à l'Ecliptique dans toutes les directions qu'on ait pu lui attribuer.

Si l'on choifit préfentement une autre Obfervation où la Terre étant, par exemple, au point A, la ligne AI détermine fon vrai lieu fur l'Écliptique: on prolongera TD en H, enforte que DH foit à DT comme l'intervalle de tems entre la troifieme & la quatrieme Obfervation eft à celui qui eft entre la feconde & la troifieme; & du point H, on tirera la ligne HI parallele à BR, qui rencontrera AI au point I. Ce point repréfentera le lieu de la Comete dans la quatrieme Obfervation, & la ligne LI tirée du point L au point I, mefurera la quantité du mouvement de la Comete réduit à l'Ecliptique depuis la premiere jufqu'à la quatrieme Obfervation. Car IR eft à RF comme DH eft à DT, c'eft-à-dire, par la conftruction, comme l'intervalle entre la troifieme & la quatrieme Obfervation eft à celui qui eft entre la feconde & la troifieme. Mais nous venons de démontrer que LF eft à FR, comme l'intervalle entre la premiere & la feconde Obfervation eft à celui qui eft entre la feconde & la troifieme. Donc la ligne LI eft telle que fes portions LF, FR, RI, comprifes entre les lignes PC, TC, BR & AI, tirées de la Terre au lieu de la Comete dans ces differentes Obfervations, font entre elles comme les intervalles de tems entre ces Ob-

ſervations, c'eſt-à-dire, comme les eſpaces parcourus; & par conſéquent la ligne *LFRI* repréſente le cours véritable de la Comete réduit à l'Ecliptique. Ce qu'il falloit trouver.

Pour déterminer en nombres tous ces élémens, on trouvera par la théorie du Soleil, les diſtances *SP*, *ST*, *SB*, *SA*, de la Terre au Soleil dans le tems de ces quatre Obſervations, & les angles *PST*, *TSB*, *BSA*, compris entre ces lignes; & dans les triangles *PST*, *TSB* & *BSA*, dont les côtés ſont connus & les angles compris entre ces côtés, on aura la valeur des cordes *PT*, *TB*, *BA*. & des angles *SPT*, *STP*, *STB*, *SBT*, *SBA* & *SAB*. Retranchant l'angle *STP* de l'angle *STC* qui meſure la diſtance de la Comete au Soleil au tems de la ſeconde Obſervation, on aura l'angle *CTP*; & dans le triangle *CTP*, dont le côté *TP* eſt connu, de même que l'angle *CTP* & l'angle *PCT*, difference entre le vrai lieu de la Comete dans les deux premieres Obſervations, on aura la valeur du côté *CP*.

Retranchant pareillement l'angle *SBT* de l'angle *SBR*, diſtance de la Comete au Soleil au tems de la troiſieme Obſervation, on aura l'angle *TBD*; & dans le triangle *BDT* rectangle en *D*, l'angle *DBT* & l'hypothénuſe *BT* étant connus, on trouvera la valeur de *DT*. On fera enſuite, comme l'intervalle de tems entre la ſeconde & la troiſieme Obſervation eſt à celui qui eſt entre la premiere & la ſeconde, ainſi *DT* eſt à *TG* ou *LK*; & dans le triangle *CKL* rectangle en *K*, dont le côté *LK* eſt connu, & l'angle *PCT*

ou

ou *LCK*, on trouvera le côté *CL*, qui étant retranché de la ligne *CP*, déterminée ci-dessus, donne la valeur de *LP*, distance de la Terre à la Comete dans la premiere Observation réduite à l'Ecliptique. On trouvera de la même maniere la distance *AI* de la Terre à la Comete dans la quatrieme Observation. Car si l'on retranche de l'angle *SAB* connu, l'angle *SAI* qui mesure la distance de la Comete au Soleil dans cette Observation, on aura l'angle *EAB*; & dans le triangle *EAB* dont le côté *AB* est connu, de même que l'angle *EAB* & l'angle *AEB*, difference entre le vrai lieu de la Comete dans les deux dernieres Observations, on trouvera le côté *AE*.

On fera ensuite, comme l'intervalle de tems entre la seconde & la troisieme Observation est à celui qui est entre la troisieme & la quatrieme, ainsi *DT* est à *DH* ou *IZ*; & dans le triangle *EZI* rectangle en *Z*, dont le côté *IZ* est connu & l'angle *IEZ* ou *AEB*, on trouvera la valeur de l'hypothénuse *EI*, qui étant ajoutée à *AE*, donne la distance *AI* de la Comete à la Terre dans la quatrieme Observation réduite à l'Ecliptique.

Ayant employé la Méthode que nous venons d'exposer dans les Observations qui ont été faites le 2 & le 26 Septembre, & le 18 Novembre 1729, on trouve que supposant la distance moyenne de la Terre au Soleil de 22 mille demi-diametres de la Terre, ou 33 millions de lieues, telle qu'on l'a déterminée par les Observations de sa Parallaxe, la distance véritable de la Comete à la Terre étoit

 le:

le 2 Septembre 1729, de 113 millions & 372 mille lieues.

Par d'autres Obſervations des 20 Septembre & 18 Novembre, on trouve la diſtance véritable de la Comete à la Terre le même jour 2 Septembre 1729, de 113 millions 413 mille lieues, qui comparée à la premiere détermination, eſt environ comme 900 à 901; ainſi ces deux diſtances trouvées par des Obſervations differentes, ne ſont éloignées l'une de l'autre que d'un millieme, ce qui eſt une préciſion beaucoup plus grande que celle que l'on oſeroit eſperer dans pareilles recherches.

Comme notre Méthode, & les calculs qui en réſultent, ſont fondés ſur la ſuppoſition que la Comete a décrit pendant l'intervalle entre les Obſervations que l'on a comparées enſemble, des eſpaces égaux en tems égaux ſur une ligne ſenſiblement droite; la conformité qui ſe trouve entre ces diſtances eſt une preuve que les inégalités apparentes, cauſées par la courbure de ſon orbe, ont été compenſées par celles de l'augmentation ou de la diminution de ſon mouvement.

A l'égard de la diſtance de la Comete à la Terre dans les dernieres Obſervations que nous en avons faites, nous la trouvons par celles du 18 Janvier de cette année 1730, de 171 millions 206 mille lieues; ainſi elle s'eſt éloignée de la Terre, dans l'eſpace de quatre mois & demi, d'envion 58 millions de lieues, la moitié de la diſtance où elle étoit le 2 Septembre; d'où il ſuit, par les règles de l'Optique, que ſon diametre ne devoit être di-

diminué que d'un tiers, & sa lumiere d'un peu plus de la moitié de celle qu'elle avoit au commencement que nous l'avons apperçue: de sorte qu'il n'est point surprenant que l'on ait continué à l'observer pendant si longtems, quoiqu'elle ait paru fort petite dès le commencement qu'on l'a apperçue.

Après avoir déterminé la distance de la Comete à la Terre dans les differentes Observations que nous en avons faites, nous avons cru devoir chercher sa distance au Soleil, que l'on peut regarder comme le principe de son mouvement. Car quoique l'on puisse supposer que les Cometes sont des Planetes qui ont pour foyer des Soleils differens du nôtre, & que quelques Auteurs ayent cru que ce pouvoient être des Satellites de quelque Planete principale de notre Tourbillon, mais si éloignée de nous, qu'elle est toujours invisible à nos yeux, & que les Satellites ne deviennent visibles que lorsqu'ils sont par rapport à nous dans la partie la plus basse de leur cercle: cependant, en attendant que ces suppositions soient confirmées par des Observations qui ayent quelque évidence, nous avons estimé qu'il étoit convenable de déterminer le mouvement des Cometes par rapport au Soleil, que presque tous les Philosophes considerent comme le centre du mouvement des autres Planetes.

Nous avons donc calculé la distance de cette Comete au Soleil suivant notre théorie, & nous avons trouvé qu'elle étoit le 2 Septembre, de 139 millions 667 mille lieues; le 22 Novembre, de 144 millions 126 mille lieues;

& le 18 Janvier 1730, de 148 millions 89 mille lieues.

La moyenne diſtance du Soleil à la Terre eſt à celle de cet Aſtre à Jupiter, comme 100 à 521; d'où il ſuit que la diſtance de cette Comete au Soleil étoit le 2 Septembre 1729, à celle de Jupiter au même Aſtre, environ comme 4 à 5: de ſorte que cette Comete étoit alors, comme nous l'avions ſuppoſé dans le Mémoire précédent, entre les orbes de Mars & de Jupiter, où elle eſt reſtée pendant tout le tems que nous l'avons apperçue.

A l'égard de la quantité de ſon mouvement, nous trouvons que depuis le 2 Septembre juſqu'au 22 Novembre 1729, dans l'intervalle de 81 jours, elle a décrit par rapport au Soleil 13 degrés & 3 minutes ſur ſon orbe, ce qui eſt à raiſon de 9' 40" par jour; & que depuis le 22 Novembre 1729 juſqu'au 18 Janvier 1730, dans l'intervalle de 57 jours, elle a parcouru 8^d 11' 20", ce qui eſt à raiſon de 8' 37" par jour. Nous trouvons auſſi que ſon mouvement réel ſur ſon orbe dans le premier intervalle de tems, eſt à ſon mouvement dans le ſecond, comme 1215 à 1140; de ſorte que la diminution de ſa vîteſſe réelle ſur ſon orbe eſt comme 15 à 14, moindre à peu près de la moitié de celle de ſa vîteſſe apparente qui eſt comme 18 à 16: ce qui eſt conforme à ce que l'on obſerve dans les Planetes, lorſqu'elles s'éloignent du Soleil, où l'on remarque deux ſortes de diminutions; l'une apparente, qui n'eſt que l'effet de leur plus grande diſtance au Soleil; & l'autre réelle ſur leur orbe, à cauſe qu'elles s'éloignent de plus en plus du principe de leur mouvement. Il

Il faut présentement examiner si les degrés de vîtesse que l'on a remarqué dans cette Comete s'accordent à la règle de Kepler, qui s'observe non-seulement dans les Planetes autour du Soleil, mais même dans les Satellites autour des Planetes principales. Suivant cette règle, une Planete éloignée du Soleil quatre fois plus que la Terre, doit faire sa révolution dans l'espace de 8 années, qui est la racine quarrée du cube de sa distance au Soleil; son mouvement réel sur son orbe doit être deux fois plus lent que celui de la Terre; & son moyen mouvement journalier, de 7' 30".

Quoique cette Comete, dans le tems que nous avons l'avons apperçue, se soit trouvée éloignée un peu plus de quatre fois du Soleil que la Terre ne l'est de cet Astre, cependant son mouvement journalier a été déterminé de 9' 40", plus grand de près d'un quart qu'il n'auroit dû l'être, suivant cette règle, à laquelle il s'accorderoit plus parfaitement, en supposant que cette Comete, après avoir passé par son Périhélie, n'étoit pas encore arrivée à ses moyennes distances, où sa vîtesse qui alloit en diminuant, devoit être plus petite que celle que l'on avoit observée.

En effet, si l'on considere la direction de la route de cette Comete, & sa distance à la Terre dans differentes Observations, dont le rapport a augmenté continuellement, pendant que son mouvement diminuoit continuellement de vîtesse, il résulte de la figure élliptique, qu'au tems de son apparition elle devoit être près de son Périhélie, d'où elle s'éloignoit en s'approchant de ses moyennes distances.

Ainſi la règle de Kepler reçoit un nouveau degré de confirmation de la théorie de cette Comete dans le rapport des diſtances des corps céleſtes aux divers degrés de leur vîteſſe, puiſqu'outre les Planetes principales & leurs Satellites, elle repréſente aſſez exactement la quantité du mouvement & de la vîteſſe de cette Comete, qui eſt peut-être la ſeule dont la diſtance au Soleil & à la Terre ait été déterminée avec preſque autant d'exactitude que celle des autres Planetes.

Connoiſſant la diſtance de cette Comete au Soleil & la quantité de ſon mouvement en divers endroits de ſon orbe, on pourroit déterminer géométriquement la figure de l'Ellipſe ſur laquelle elle fait ſa révolution; mais comme cette recherche, pour être exacte, demande que l'on connoiſſe avec une très grande préciſion ſa diſtance au Soleil dans les diverſes Obſervations que l'on y employe, nous nous contenterons de remarquer que l'on peut repréſenter aſſez exactement ſon cours, en ſuppoſant que ſa moyenne diſtance au Soleil eſt à celle de la Terre au Soleil comme 4800 eſt à 1000. D'où il ſuit, ſuivant la règle de Kepler, que ſa révolution ſur ſon orbe doit être d'environ dix années, & ſon moyen mouvement journalier de 6 minutes.

Par ce moyen, attribuant à l'orbe de cette Comete une excentricité de 1000 parties, enſorte que la proportion de ſon grand axe à celle du petit ſoit comme 5800 à 3800, on aura ſon mouvement vrai dans ſon Aphélie de près de 4 minutes, & dans ſon Périhélie de plus de 9 minutes, conformément à celui

lui que nous avons observé dans cette situation.

A l'égard du lieu du Nœud de cette Comete, nous l'avons trouvé par les premieres Observations à $10^d\ 16'$ du Verseau, & par les dernieres à $10^d\ 6'$ du même Signe, éloigné seulement de 6 degrés du lieu où nous avons commencé à l'appercevoir. Nous avons aussi trouvé l'inclinaison de l'orbite de cette Comete à l'Ecliptique par les premieres Observations comparées ensemble, de $76^d 56'$, & par les dernieres, de $76^d\ 34'$, avec une difference seulement de 22' de l'une à l'autre; ce qui est bien different de celle des autres Planetes, dont la plus grande, qui est celle de Mercure, n'est au plus que de 7 degrés. Mais comme l'on ne connoit point encore, du moins avec évidence, la cause physique de l'inclinaison des Orbites des Planetes à l'Equateur du Soleil, & la raison pour laquelle ces inclinaisons sont differentes entre elles, peut-être que les Traités que l'on composera pour le Prix que l'on vient de proposer, nous donneront quelque éclaircissement sur la cause d'une si grande inclinaison.

Il nous reste présentement à déterminer les lieux par où cette Comete a dû passer depuis que nous avons cessé de la voir, ceux où elle se trouve présentement, & où on pourra l'appercevoir dans la suite, afin de la pouvoir chercher dans le Ciel au tems qu'elle sera dans la situation la plus convenable.

Elle étoit à la fin de Janvier 1729, au-dessus de la Constellation du Dauphin, d'où elle s'est avancée vers le Pégase; & elle doit se trou-

trouver présentement dans l'aile du Cygne, avec une latitude septentrionale de près de 50 degrés; elle passera ensuite vers la queue de cette Constellation, & se trouvera dans le mois de Septembre en opposition avec le Soleil, qui sera la situation la plus propre pour la voir, parce qu'elle sera alors plus près de la Terre que dans toute autre saison de cette année. Il sera cependant alors très difficile de la découvrir, parce que sa distance sera encore plus grande que lorsqu'on a cessé de la voir à la vue simple.

Longitude & Latitude de la Comete qui a paru en 1729 & 1730.

1729.				Longitude.			Latit. Bor.		
Août	31 à	9^h	34'	♒ 8^d	34'	0"	28^d	48'	9"
Sept.	2	9	25	8	3	10	29	6	30
	3	9	28	7	48	42	29	14	4
	10	8	6	6	18	34	29	55	7
	11	7	59	6	6	49	30	4	35
	12	7	33	5	55	20	30	9	32
	15	8	28	5	21	29	30	24	45
	16	8	24	5	11	22	30	29	0
	18	7	55	4	50	51	30	39	25
	19	7	7	4	42	58	30	43	50
	21	7	8	4	25	50	30	51	48
	23	7	0	4	8	36	31	0	17
	26	7	0	3	48	39	31	13	57
Octo.	10	7	10	2	38	1	31	54	29
	11	7	5	2	36	5	31	56	10
	12	7	8	2	34	32	31	59	19
	14	7	48	2	30	20	32	3	1
	19	6	40	2	26	13	32	15	13

1729

			Longitude.	Latit. Bor.
1729				
Octob.	22	à 7h 7' Directe	2d 33' 42"	32d 21' 31"
	24	6 15	♒ 2 34 17	32 23 8
	26	6 32	2 36 46	32 28 0
	27	8 33	2 39 43	32 30 0
Nov.	10	8 24	3 42 37	32 57 17
	14	6 12	4 8 27	33 3 9
	16	7 40	4 23 5	33 6 2
	17	6 37	4 29 55	33 10 0
	18	5 38	4 38 14	33 11 40
	20	9 12	4 54 33	33 16 30
	21	6 28	5 10 31	33 18 40
	24	5 54	5 29 29	33 26 0
	30	7 55	6 27 23	33 39 34
Dec.	2	6 54	6 50 20	33 43 58
	3	6 19	6 59 13	33 45 45
	9	6 17	8 6 41	34 1 52
	14	6 0	9 7 11	34 18 10
	19	5 32	10 6 46	34 32 38
	20	5 29	10 19 16	34 37 24
	24	6 34	11 14 52	34 45 32
	27	5 36	11 57 32	35 1 39
1730				
Janv.	7	5 35	14 41 31	35 44 34
	8	6 10	14 57 23	35 48 50
	16	5 48	17 1 29	36 27 30
	17	5 51	17 16 12	36 33 22
	18	5 57	17 34 16	36 38 50

ANA-

ANATOMIE DE LA POIRE.

Par M. DU HAMEL *.

IL n'eſt guere poſſible de raiſonner juſte ſur un corps organiſé, & de décider des uſages des parties qui le compoſent, ſans avoir auparavant une connoiſſance exacte de leur ſtructure, de leur ſituation, & de la connexion qu'elles ont les unes avec les autres.

C'eſt la voye qu'ont tenu juſqu'ici tant d'habiles Anatomiſtes, pour débrouiller le méchaniſme prodigieux qui ſe trouve dans le corps des Animaux. C'eſt à cet ordre, qu'ils ont gardé dans leurs recherches, que nous ſommes redevables de tout ce que nous avons aujourd'hui de plus certain ſur l'œconomie du Corps humain; & cet ordre ne peut être changé, ſi l'on veut réuſſir dans l'examen de quelque corps organiſé que ce ſoit.

Il arrive cependant aſſez ſouvent, que cet examen ſcrupuleux des parties rend la connoiſſance des uſages très difficile.

A force de travail & de recherches, on découvre une ſtructure fine, délicate & compoſée. Les deſſeins ſur leſquels elle a été formée ſont incertains, & les effets qu'elle doit produire, bien differens de ceux que nous attribuons (par conjecture ſeulement) à

* 29 Juillet 1730.

à une organiſation ſimple & unie, dont nous nous étions formé une idée peu conforme à la réalité.

C'eſt ce que m'a fait connoitre le travail que j'ai fait ſur la Poire. La ſtructure d'une pelote de coton, ou, ce qui eſt la même choſe, d'une éponge, d'un parenchyme, chargé des ſucs du Poirier, me paroiſſoit d'abord ſuffiſante pour ſatisfaire à l'explication de tout ce que je connoiſſois de ce fruit: mais depuis qu'en y prêtant plus d'attention, j'y ai découvert des parties ſolides, & d'autres molles, des vaiſſeaux contournés de differentes manieres dans le même fruit, & toujours uniformément dans les differens fruits du même genre; depuis que j'ai obſervé des eſpeces de membranes, de cartilages, de glandes, de ligamens, & de pores, j'ai bien reconnu que les explications ſimples n'étoient pas toujours les meilleures en Phyſique, & qu'il falloit abandonner les préjugés que j'avois ſur la nature de la Poire. Pour y parvenir, je réſolus de m'attacher uniquement à la ſtructure & à la ſituation de ſes parties, & de mettre après cet examen celui de leurs uſages.

Sur ce projet, il y a environ trois ans que j'eſſayai de diſſequer pluſieurs fruits mols, pourris, ou cuits de differente maniere. Mais après ces préparations, à peine les parties les plus groſſieres ſe trouverent-elles conſervées. Mon travail ne ſervit donc qu'à me faire entrevoir un nombre d'organes, ſans en pouvoir reconnoitre aucun un peu clairement.

Il

Il eſt vrai qu'on employe même avantageuſement ces ſortes de préparations dans l'Anatomie des Animaux, mais ce n'eſt que ſur certaines parties; la cuiſſon, par exemple, fait appercevoir bien clairement la direction des fibres d'un muſcle, mais elle détruit entierement les vaiſſeaux & les membranes, elle les réduit en gelées.

Les macerations conviennent en plus d'occaſions, elles ne détruiſent que les parties extrêmement fines qui lient & uniſſent les autres qu'on ſe propoſe de connoitre; par ce moyen on eſt donc en état d'en examiner la ſtructure: ce qui me détermina à mettre tremper dans differentes liqueurs pluſieurs eſpeces de Poires que je choiſis à deſſein, les unes fort mûres, & les autres encore vertes.

Je n'ai pu retirer aucun avantage des Eaux fortes, elles détruiſent tout, & lorſque les fruits y ont trempé longtems, ils deviennent d'une ſubſtance qui paroît uniforme & preſque comme de la pâte.

Ce que j'ai remarqué ſeulement, c'eſt que les fruits caillent fort promptement l'Eau-forte, & la rendent comme de la gelée, qui ſe réduit enſuite, quoique difficilement, en une eſpece de *Serum*.

Les fruits acides & les doux produiſent également cette coagulation; j'en ai fait l'expérience ſur les Oranges douces & aigres, ſur les Ceriſes & les Groſeilles, ſur les Poires & les Pommes, &c.

On ne tire pas non plus un grand avantage de la maceration des fruits dans l'Eau-de-

vie.

vie & le Vinaigre diſtillé; ces liqueurs, au lieu de commencer la deſunion des parties, les racorniſſent, & les rendent ainſi plus difficiles à diſſequer.

C'eſt de la maceration dans l'eau commune, dont j'ai retiré le plus d'avantage: elle pénetre petit-à-petit, elle s'inſinue entre les parties des fruits, elle en détruit un nombre d'infiniment fines, & épargne les autres, elle en augmente ſeulement un peu le volume, ce qui les fait plus aiſément appercevoir; mais elle agit très lentement, de ſorte que quelques-uns n'ont été dans l'état où je les demandois, qu'au bout de deux ans.

Par les macerations j'étois donc parvenu à attendrir mes Poires: mais cela ne ſuffiſoit pas, il falloit achever la desunion d'un nombre de parties qui par leur entrelaſſement forment la ſubſtance de ce fruit. Voici comme je m'y ſuis pris.

Je les ai toujours diſſequé nageant dans l'eau, quelquefois avec une Lancette ou un petit Scapel, d'autres fois avec la pointe d'un Canif très délié ou une érigne très fine; ſouvent même la délicateſſe des parties eſt ſi grande, que la ſeule pointe d'un curedent m'a fort bien ſervi: mais rien ne m'a mieux réuſſi que de darder de l'eau chaude avec une Seringue à injection ſur les endroits difficiles à ſéparer, ou de ſouffler ſimplement avec un tuyau ſur ces endroits; cependant cela n'a quelquefois pas ſuffi, & j'ai été obligé de preſſer mollement entre les doigts ou avec des petites pinces, & de ſecouer & agiter dans l'eau la piece que je préparois, pour oc-

casionner avec douceur & ménagement la desunion que je souhaitois. Mais ce qu'il est important de remarquer, lorsqu'on veut préparer proprement une partie, c'est de ne pas entreprendre de la dissequer tout de suite: il faut, après l'avoir travaillée un tems, la laisser reposer & se macerer encore pendant une quinzaine de jours.

Ces préparations, si nécessaires en Anatomie, dépendent d'un grand nombre de précautions qui paroissent quelquefois dégénerer en scrupules: elles n'en sont cependant pas moins importantes. C'est ce qui m'a engagé à détailler les moyens que j'ai employés pour reconnoitre les parties que je me suis proposé de décrire, afin que ceux qui voudront perfectionner cette recherche, puissent profiter des mêmes secours qui m'ont été si utiles.

Après m'être suffisamment étendu sur ces sortes de préparations en général, je crois qu'il sera plus utile de joindre à la description de chaque partie la maniere de la découvrir: ainsi je passe à la division générale de la Poire.

La Poire, comme l'a décrite M. de Tournefort, est un fruit charnu, plus mince ordinairement vers la queue que vers l'autre bout, où il est garni d'un nombril formé par les découpures du calice *: on trouve dans son intérieur cinq loges remplies de pepins, c'est-à-dire, des semences couvertes d'une peau cartilagineuse.

Cet-

* Pl. I. Fig. 1. Pl. II. Fig. 1. & 2.

Cette définition, qui suffisoit à cet Auteur pour caractériser la Poire, peut bien nous servir à faire la division de ce fruit en trois parties, qui sont, la tête ou l'ombilic, la queue ou le pédicule, & le corps, parties à décrire chacune en particulier: mais comme actuellement ma vue est differente de celle de cet illustre Botaniste, & que l'examen que je me propose de ce fruit est plus intime que celui qu'il avoit pour but, il m'a paru que j'étois obligé de le considerer dans ses tégumens, dans ses vaisseaux, & dans les organes qui appartiennent à ses pepins; trois objets assez considerables pour donner de l'étendue à autant de parties de mon Mémoire. Je commence par celle qui est extérieure.

DES TEGUMENS.

On retranche de dessus ces fruits une peau, qui est ordinairement dure & desagréable. Par l'examen que j'en ai fait, j'ai reconnu que ce qu'on enleve avec le couteau est composé de quatre substances differentes qui s'étendent sur tout le fruit, & le recouvrent en entier; c'est pourquoi je les nomme ses *tégumens* ou ses *enveloppes communes*, dont la premiere, en commençant par l'extérieur, peut s'appeller l'*épiderme*, la deuxieme le *corps muqueux*, la troisieme le *tissu pierreux*, & la quatrieme la *peau*. J'ai cru devoir distinguer ainsi ces quatre tégumens, par la ressemblance qu'ils ont avec ceux du Corps humain, comme il sera aisé de s'en convaincre par l'examen

men que nous allons faire de chacun d'eux en particulier.

DE L'EPIDERME.

Lorſqu'on examine avec une Loupe la ſuperficie de la plupart des Poires, elle paroit chagrinée; † & on découvre deſſus, outre des petites gales dont nous parlerons dans la ſuite, une quantité ‡ de petits points blancs, qui examinés avec un bon Microſcope, ne paroiſſent être qu'une membrane mince, tranſparente & blanchâtre qui s'eſt détachée du fruit, & s'eſt relevée, comme on le voit dans la Fig. 2. Pl. I.

De plus, j'ai encore remarqué ſur l'écorce de quelques fruits macerés, qu'il reſtoit de petits morceaux de membranes qui ſe diſtinguoient du reſte en ce qu'ils étoient bruns, brillans, gercés, & qu'ils ne ſe détachoient que par écailles.

Je crus d'abord que ces morceaux de membrane appartenoient à une cinquieme envelope très mince, délicate, fort adhérente, & que je ne pouvois à cauſe de cela appercevoir que dans quelques endroits, quoiqu'elle recouvrît toute la Poire: cela paroiſſoit probable. Cependant par les moyens que j'ai employés pour m'en aſſurer, j'ai reconnu parfaitement que ce que j'avois apperçu tant ſur les fruits verts que ſur les macerés, n'étoit que des parcelles d'épiderme qui s'étoient deſ-

ſe-

† Pl. I. Fig. 3. ‡ Fig. 2.

fechées, & fous lefquelles il s'en étoit régéneré un nouveau.

Pour examiner la ftructure de ces parcelles d'épiderme, j'en mis de très petits morceaux au foyer d'un Microfcope à liqueur: ils me parurent d'une fubftance très uniforme, & je n'y reconnus ni ramification de vaiffeaux, ni pores (peut-être à caufe de leur deffechement;) je remarquai feulement qu'ils étoient très tranfparens: mais une membrane fi mince peut-elle être opaque?

On a coutume d'employer un fer rouge ou l'eau bouillante pour détacher l'épiderme des Animaux; ces mêmes fecours m'ont été auffi très utiles pour reconnoitre celui de notre fruit, de forte que par leur moyen je l'ai apperçu auffi clairement dans les jeunes fruits que je l'avois fait dans les fruits mûrs à l'aide des macerations, & dans les mols fans aucune préparation.

† Cette membrane fe trouve par tout le fruit, je l'ai obfervée à la queue, au corps & dans l'ombilic; elle eft mince, d'un tiffu uni, qui ne paroît point compofé de vaiffeaux, mais elle eft ferme, & fortement attachée au corps muqueux.

‡ Le Microfcope nous la fait encore appercevoir percée d'une infinité de pores qui ne font pas tous de la même groffeur; les uns font très fins, & forment comme un fond de fable; les autres font plus confiderables, & arrangés de telle forte, qu'ils imitent en quelque maniere un réfeau.

La

† Pl. I. Fig. 1. ‡ Fig 4.

La couleur de l'épiderme eſt incertaine: quelquefois elle paroît tranſparente comme de l'écaille blonde; pour-lors elle prend, ou plutôt elle laiſſe appercevoir la couleur du corps muqueux: mais d'autres fois, & ſur-tout dans les endroits où le fruit a été le plus expoſé au Soleil, elle paroît rouge.

On pourroit donc à cette occaſion faire la queſtion, ſi la couleur des fruits réſide dans l'épiderme, ou dans le corps muqueux.

Je ſai que dans les fruits qui ſont colorés naturellement, comme la Pomme de calville, pluſieurs Pêches, la Poire ſanguinole, &c. la couleur réſide non ſeulement dans le corps muqueux, mais même dans les vaiſſeaux, & ſur-tout dans leur épanouïſſement aux approches du tiſſu pierreux.

Mais dans les Poires qui ne ſont pas rouges naturellement, & qui ne prennent cette couleur que par l'action du Soleil, elle ne paſſe jamais le corps muqueux, & paroît ſouvent ne réſider que dans l'épiderme, ou du moins dans la ſurface externe du corps muqueux; ce qui n'eſt pas aiſé à vérifier, car la couleur rouge diſparoît, ſoit qu'on mette les fruits dans l'eau bouillante, ſoit qu'on eſſaye d'en détacher l'épiderme avec un fer rouge; ainſi pour conſerver la couleur, on n'a d'autre moyen de détacher l'épiderme qu'avec la pointe du Scalpel. Qui ſait pour-lors ſi on n'emporte pas une partie du corps muqueux avec l'épiderme? ces deux membranes ſont fort minces, avec cela très intimement unies, ainſi elles ſont très difficiles

à

à séparer l'une de l'autre: je suis cependant venu à bout de le faire dans quelques especes, ce qui paroîtroit décider la question; mais comme cette observation a beaucoup de rapport avec celle que j'ai été obligé de faire pour reconnoitre ce corps muqueux, je n'en parlerai que lorsque j'examinerai cette membrane.

† Les petits points blancs que j'ai remarqués être des petits morceaux d'épiderme desséchés, & qui tombent par écailles, font voir qu'il se détruit petit à petit comme dans les Animaux; & ce qui est encore admirable, c'est que sa régénération se fait aussi de la même maniere; car si, comme je l'ai déja remarqué, l'on examine le dessous de ces écailles blanches dont je viens de parler, on y trouve un nouvel épiderme tout régéneré sans aucune cicatrice. En effet, comme l'épiderme se détruit peu à peu, & se régénere de même, la superficie des fruits ne seroit-elle pas toute galeuse, si sa régénération se faisoit avec cicatrice?

Le rapport & la conformité est si exacte entre l'épiderme de notre fruit & celui de l'Homme, que je serois fort porté à lui attribuer une pareille origine: mais comment l'épiderme de l'Homme est-il produit? est-ce par une liqueur, par un suc, ou une rosée qui se condense & s'épaissit sur la peau, ou par l'expansion de quelques vaisseaux? Si c'est une rosée, s'échape-t-elle des nerfs ou des vaisseaux sécrétoires, ou indifferemment de

† Pl. I. Fig. 2.

de tous les vaiſſeaux? Si c'eſt plutôt par l'expanſion de quelques vaiſſeaux, eſt-ce par celle des papilles nerveuſes, des vaiſſeaux ſécrétoires ou des lymphatiques, ou ſans diſtinction de tous les vaiſſeaux? Quoique la production de cette membrane ait été un point fort diſcuté, il eſt cependant encore très incertain; chaque Anatomiſte a preſque eu ſon ſentiment particulier, & chaque ſentiment a encore ſes partiſans.

En attendant que notre travail ſur l'anatomie des Végétaux nous ait fourni quelques lumieres ſur ce ſujet, je me contenterai de remarquer que les nerfs étant les organes de la ſenſation & du mouvement, notre Poire qui n'a point de mouvement, & qui ne nous donne aucune marque de ſenſibilité, n'a probablement point de nerfs; d'ailleurs les diſſections les plus exactes ne nous y ont rien fait découvrir qui en eût le caractere: ainſi l'épiderme de notre Poire n'eſt probablement formé ni par l'épanouïſſement des houppes nerveuſes, ni par l'épaiſſiſſement du ſuc nerveux.

Mais ce fruit tranſpire (nous nous en ſommes aſſurés par des expériences particulieres) ainſi il y a des vaiſſeaux excrétoires; d'un autre côté il eſt recouvert par un corps muqueux (comme nous allons le voir) ainſi ſon épiderme pourroit être formé ou par l'épanouïſſement des vaiſſeaux ſécrétoires, ou par l'épaiſſiſſement de la ſuperficie extérieure du corps muqueux. Je ſerois fort porté à embraſſer ce dernier ſentiment, ſur-tout ſi cette muquoſité qu'on remarque en touchant

ce corps, qu'on appelle à cause de cela *muqueux*, vient d'une eſpece d'extravaſion de la lymphe glutineuſe qui ſert à la réparation des vaiſſeaux & des membranes; mais encore un coup, la nature de l'épiderme n'eſt gueres plus éclaircie par l'anatomie de la Poire que par celle des Animaux, ainſi j'attends, pour embraſſer un ſentiment, que l'anatomie de quelques autres fruits m'ait été plus favorable.

Enfin, pour dire un mot des uſages de cette membrane, il me paroît probable que ſa ſituation, ſa ſolidité, & les autres caracteres que nous avons remarqués en elle, ſont des preuves manifeſtes que la Nature l'a deſtinée à défendre des injures de l'air les autres parties de la Poire qui ſont tendres, molles & délicates.

La fermeté de l'épiderme peut encore écarter quantité de petits inſectes, qui ſans cela détruiroient toutes les Poires, comme il arrive au Beurré & au Doyenné. Lorſque leur épiderme eſt fort éminci par une grande maturité, cette membrane peut encore diminuer la tranſpiration, qui étant trop abondante, deſſecheroit les fruits dans les grandes chaleurs.

Je finis cet article ſans parler des maladies de l'épiderme, parce que je crois qu'on lui attribue mal-à-propos celles du corps muqueux.

Quand, par exemple, on voit l'épiderme ſe détacher preſque entierement, & tomber par grandes pieces, il m'a toujours paru que c'étoit le corps muqueux, qui étant at-

taqué, laiſſoit l'épiderme ſans ſoutien; & ſi quelquefois après cette maladie il ne reſte point de cicatrice ſur la Poire, c'eſt que quand le corps muqueux n'eſt pas détruit dans toute ſon épaiſſeur, mais ſeulement dans ſa partie externe, ou qui eſt contiguë à l'épiderme, il peut alors ſe réparer ſans cicatrice.

DU CORPS MUQUEUX.

Quand par les macerations on eſt parvenu à enlever l'épiderme ſeul, on apperçoit * une membrane fort mince, déliée & très délicate, qui demeure attachée au tiſſu pierreux qu'elle couvre immédiatement & dans toute l'étendue de la Poire.

En la touchant, on remarque une certaine douceur ou une viſcoſité qui nous la fait appeller le *corps muqueux*, nom qui convient encore par la place qu'elle occupe entre l'épiderme & la peau.

Cette membrane reſte communément adhérente, tantôt à l'épiderme, & tantôt au tiſſu pierreux, ce qui prouve bien ſon exiſtence & ſon caractere de membrane; mais pour obſerver ſa tiſſure, il falloit la voir ſeule & détachée de toute autre partie. Elle eſt ſi délicate, que je n'ai pu en avoir que de petits morceaux: ainſi ſéparés, je les ai examinés avec un Microſcope à liqueur, qui me les a fait appercevoir très tranſparens, & percés comme l'épiderme de quantité de pores, quoique moins apparens.

Le

* Pl. I. Fig. 5.

Le corps muqueux de beaucoup de Poires est vert, cela ne fait pas de difficulté. Il n'en est pas de même aux endroits exposés au Soleil, comme je l'ai fait sentir en parlant de l'épiderme, & il n'est pas aisé de décider à laquelle de ces deux membranes appartient cette couleur rouge. Voici quelques observations qui tendent à éclaircir la question.

Ayant essayé plusieurs fois, & sur differens fruits, d'emporter avec un Scalpel très fin l'épiderme d'une petite partie de Poire que j'avois exposé à une Loupe de trois à quatre lignes de foyer, j'ai remarqué,

Que quelquefois je n'ai pu enlever l'épiderme, sans être teint de rouge, & d'autres fois je l'ai détaché clair & transparent, sans être teint en aucune maniere; lorsque j'ai gratté pour enlever le corps muqueux, tantôt la couleur rouge s'est conservée jusques sur les pierres, & tantôt je l'ai apperçue superficielle, de sorte que la partie interne du corps muqueux étoit encore verte.

Ces observations me font croire que la couleur rouge réside dans le corps muqueux, mais qu'elle l'affecte diversement, de sorte que tantôt elle ne paroît que sur la surface externe ou voisine de l'épiderme, & tantôt toute la surface en est teinte.

Si quelquefois je n'ai pu détacher l'épiderme, sans être coloré, sa grande délicatesse ou son adhérence au corps muqueux pouvoient bien en être la cause.

Quoique je n'aye rien de bien certain sur la nature de cette membrane, je crois ce-

pendant qu'elle eſt formée d'un laſſis de vaiſſeaux infiniment fins, baignés d'une liqueur mucilagineuſe qui lui donne ſa douceur.

Pour ce qui eſt de ces uſages, la maniere avec laquelle elle embraſſe les pierres du tiſſu pierreux, m'a fait conjecturer qu'elle ſert à les aſſujettir & les tenir dans une même ſituation; il arrive peut-être encore qu'elle ſert à la régénération de l'épiderme: mais il eſt bon de remarquer que la ſurface chagrinée que nous avons obſervée ſur beaucoup de Poires, leur vient de cette ſorte d'adhéſion du corps muqueux au tiſſu pierreux.

J'ai dit que beaucoup d'Animaux s'accommoderoient fort de cette membrane pour leur nourriture, ſi l'épiderme ne la mettoit à couvert. Cette défenſe n'empêche pas qu'une eſpece de Mites très petites, que je n'ai obſervées que confuſément, ne mangent le corps muqueux ſous l'épiderme, qu'elles laiſſent en ſon entier: il y a encore quelquefois une troupe de ces Chenilles, qu'on appelle des *Livrées*, qui après avoir détruit l'épiderme, mangent entierement le corps muqueux, ce qui produit ces petites gales fines qu'on remarque ſi ſouvent ſur les Poires; car lorſque le corps muqueux eſt détruit en entier, il ne ſe régénere plus, mais il ſe forme à la place une eſpece de gale gommeuſe.

Le corps muqueux eſt encore ſujet à bien des accidens, qui preſque tous alterent ſa couleur.

Les meurtriſſures, comme les coups de grêles, le deſſechent, & font des taches noires ſur les Poires.

Les

Les humidités, quand elles ſont longues & froides, interrompant la tranſpiration, occaſionnent ſa corruption, qu'on reconnoit à la couleur griſe & livide qu'elle prend alors. J'obſerverai à cette occaſion, que quelques Auteurs recommandent, pour faire groſſir les fruits, de les mettre, lorſqu'ils ſont encore petits, tremper dans l'eau juſqu'à ce qu'ils ayent acquis leur maturité. J'ai fait cette expérience, & mes fruits ont été d'abord attaqués de la maladie dont je viens de parler, ſe ſont enſuite fendus, & enfin ſe ſont détachés de l'arbre preſque pourris & avant leur maturité.

La trop grande ardeur du Soleil quelquefois le deſſèche petit à petit, mais aſſez ſouvent produit cette maladie, qu'on appelle les *coups de Soleil*, qui n'eſt autre choſe que la rupture des vaiſſeaux & des ſacs aëriens, occaſionnée par la trop grande raréfaction de l'air & des liqueurs, comme on peut s'en aſſûrer en approchant un fer chaud d'une Poire encore verte, car alors on entend une eſpece de décrépitation & un craquement conſiderable, qui change ſur le champ la couleur du corps muqueux.

DES PIERRES.

* Les deux envelopes dont je viens de parler, étant levées, on découvre une quantité de corps ſolides, qui ſont tellement arrangés ſur toute la ſuperficie de la Poire, qu'ils

* PL. I. Fig. 6.

qu'ils lui en forment une troisieme que nous nommerons l'*envelope pierreuse*, parce qu'on a coutume d'appeller des pierres, les petits corps dont il s'agit *.

Je mets ce tissu pierreux au nombre des envelopes, quoique dans la Poire il se trouve des pierres ailleurs que sous son corps muqueux: mais cet ordre n'est point opposé à celui que les Anatomistes observent à l'égard des Animaux, puisque le corps graisseux, qui est mis au nombre de leurs tégumens, se trouve encore répandu dans toutes les parties de leur corps.

Les pierres de la superficie, & celles qui se rencontrent dans les differentes parties de la Poire, m'ont paru, tant par leur solidité que par les organes qui les accompagnent, d'une nature assez semblable pour n'être point séparées; ainsi j'ai cru qu'il seroit plus à propos, même plus conforme à l'usage des Anatomistes, d'examiner dans un seul & même article les pierres qui sont arrangées sous le corps muqueux, & celles qui sont répandues dans la substance de la Poire, quoique je me fusse proposé, dans cette premiere Partie, de n'examiner que ce qui concerne les tégumens.

Les pierres sont donc répandues dans toute la substance de la Poire, mais elles n'y sont pas jettées tout à fait au hazard.

Elle sont amoncelées auprès de l'ombilic, & y forment une espece de roche.

Sous

* M. Ruisch a parlé des pierres, & les a nommés *corps aciniformes*. Mrs. Grew & Malpighi en ont aussi parlé.

† PL. II. Fig. 1.

[a]Sous le corps muqueux, elles ſont arrangées aſſez régulierement à côté les unes des autres, ce qui m'a fait nommer cet aſſemblage, le *tiſſu* ou l'*envelope pierreuſe.*

Le long de l'axe du fruit, excepté dans le centre, elles forment par leur diſpoſition une eſpece de canal; ce canal eſt diviſé en deux parties par les pepins. Dans l'examen que je ferai de ces deux parties, j'appellerai la ſupérieure, ou celle qui eſt proche de l'ombilic[b], le *canal pierreux*; & l'inférieure, ou celle qui eſt proche de la queue, la *gaine pierreuſe*; car pour reconnoitre ces parties, il faut leur donner des noms.

Il n'y a point d'endroit dans le fruit où les pierres [c] ſoient plus groſſes qu'aux environs des pepins, elles y ſont plus écartées les unes des autres que par-tout ailleurs, & les eſpaces qui ſont entre elles ſont remplis par une ſubſtance fine & ordinairement bien differente, à la vue & au goût, de la ſubſtance propre de la Poire, mais elle eſt aſſez ſemblable à celle qui unit les grains du tiſſu pierreux; c'eſt cette eſpece d'envelope des pepins que j'ai appellée la *ſubſtance pierreuſe.*

Depuis cette ſubſtance juſqu'au tiſſu pierreux, il ſe trouve répandu dans la ſubſtance propre de la Poire un nombre [d] de petites pierres très écartées les unes des autres, & qui, à cauſe de cela, ne ſe remarquent pas aiſément: j'ai obſervé qu'elles vont toujours diminuant en nombre & en groſſeur depuis le centre juſqu'à la circonference.

V 6 En-

[a] Pl. I. Fig. 6. Pl. II. Fig. 1. [b] Pl. II. Fig. 1.
[c] Fig. 1. 2. & 3. [d] Fig. 1. & 2.

Enfin, il y en a encore une grande quantité de très fines qui font répandues par toute la Poire entre les pierres dont j'ai parlé: on ne peut cependant les y découvrir qu'à l'aide d'une Loupe, & après de longues macerations.

Mais une chofe finguliere, c'eft que toutes ces pierres qui font, cemme nous venons de le voir, fituées fi differemment dans notre fruit, ont cependant une grande connexité les unes avec les autres, & forment toutes enfemble une continuité que nous allons fuivre dans toute fon étendue.

D'abord elles font fituées tout le long de la queue [a] entre les tégumens & un faifceau de vaiffeaux qui en occupent le centre.

A l'infertion de la queue au corps de la Poire, elles fe divifent en deux [b] portions, dont une qui eft le tiffu pierreux, s'épanouït fur la furface de la Poire, & l'autre qui eft la gaine pierreufe, fe prolonge encore felon fon axe, enveloppant, comme dans une efpece de gaine, un gros faifceau de vaiffeaux que tout le monde connoit en cet endroit.

Un peu au-deffous de la bafe des pepins, cette gaine [c] s'épanouït, & c'eft en cet endroit que commence la fubftance pierreufe que je regarde comme le foyer de toutes les pierres qui font répandues dans la fubftance propre du fruit, de forte que je crois que par les pierres intermédiaires, il y a une efpece de communication entre cette fubftance pierreufe & le tiffu pierreux: quoi qu'il en foit, elle

a Fig. 1. b Fig. 1. c Pl. II. Fig. 1, 2, & 3.

elle forme autour des pepins une envelope ſenſible, épaiſſe, & de figure à peu près ovoïde, qui par ſon retréciſſement devient ce que nous avons appellé le *canal pierreux*, qui s'étend juſqu'à l'ombilic; la longueur de ce canal varie beaucoup, ſuivant les differentes eſpeces de Poires. Dans les Bergamottes & les autres Poires qui ont la tête renfoncée, il eſt fort court, au-lieu que dans le [a] Bon-chrétien & beaucoup d'autres eſpeces il eſt aſſez long: les Pierres dans cet endroit ſont ordinairement groſſes, très ſerrées les unes contre les autres, de ſorte que ſouvent elles s'uniſſent pluſieurs enſemble, quelquefois même j'ai trouvé le [b] canal tout d'une piece.

[c] J'ai dit que le canal pierreux ſe terminoit à l'ombilic, c'eſt auſſi en cet endroit que vient finir le tiſſu pierreux, & la réunion de l'un & de l'autre y forme ce que nous avons appellé *la roche*.

[d] Cette roche a la figure d'un cone renverſé, de maniere que la baſe répond à l'ombilic, & la pointe, qui à la vérité eſt tronquée, regarde les pepins. Elle ne paroît d'abord compoſée que d'un amas de pierres ſoudées fort irrégulierement enſemble [e], cependant elle ſe diviſe fort aiſément, & d'une maniere très diſtincte en deux parties, une extérieure, & l'autre intérieure [f]; celle-ci, qui en eſt comme le noyau, a auſſi la figure d'un cone tronqué, & c'eſt la continuation du canal pierreux, qui en s'épanouïſſant par ſon extré-

a Fig. 1. b Fig. 8. c Fig. 1. 4. & 5.
d Fig. 4. & 5. e Fig. 4. f Fig. 9.

trémité en maniere de trompe, forme à l'endroit de l'ombilic la base du cone.

Pour ce qui est de la partie extérieure de la roche, c'est un prolongement du tissu pierreux qui fournit une espece d'envelope au noyau dont je viens de parler, de maniere cependant qu'elle est beaucoup plus épaisse du côté de l'ombilic que de l'autre, ce qui augmente la largeur de la base du cone.

Enfin, je crois que par ce prolongement le tissu pierreux communique encore avec la substance pierreuse.

L'on connoit par cet examen général, que les pierres affectoient de certaines positions constantes, quoique differentes presque dans chaque partie de la Poire. Ces positions ne sont certainement pas inutiles, mais avant de former aucune conjecture sur leur usage, il faut bien connoitre la nature de ces pierres: pour cela, j'ai commencé par les considerer seules & détachées de toutes les parties qui les environnent, & ensuite je les ai examinées jointes avec les parties qui s'unissent à elles.

Suivant mes observations, il seroit inutile de chercher des pierres dans les fruits nouvellement noués; cette partie du fruit qui doit s'endurcir, ne m'a paru dans ce tems qu'une masse blanche, compacte, à la vérité, mais toute tendre & toute pleine d'eau. Dans la suite cette substance paroît se diviser par grains blancs qui n'ont encore gueres de solidité, & qui font presque toute la substance intérieure du fruit. Enfin ces grains grossissent & durcissent peu à peu, de sorte que les fruits étant encore fort petits, sont tout rem-

remplis de pierres: ces pierres ne sont cependant pas si dures que dans les fruits parvenus à leur maturité, & elles conservent une legere transparence, qui donne lieu d'appercevoir quelques vaisseaux * qui vont s'insérer & se ramifier dans leur substance. A mesure que les Poires approchent de leur maturité, les pierres disparoissent en quelque maniere, & il semble que la meilleure partie s'en détruise; nous verrons cependant par la suite de ce Mémoire, qu'elles ne diminuent ni en nombre ni en grosseur, bien-loin de cela elles deviennent plus dures & plus opaques, sur-tout celles du tissu pierreux.

C'est dans cet état que ces pierres examinées au Microscope, ne m'ont jamais paru formées par couches, ou par l'union de plusieurs lames pierreuses, mais seulement par l'assemblage de plusieurs grains, ou si l'on veut, par l'union de plusieurs pierres beaucoup plus petites, qui communiquent les unes avec les autres par des vaisseaux.

† J'ai outre cela quelquefois apperçu dans ces grosses pierres, qui forment la gaine pierreuse, une espece de lassis de la même substance que la pierre, qui imite assez bien les cellules de la moëlle des os, & qui est formé par des vaisseaux endurcis.

Il est encore bon d'observer que ces pierres brulent au feu, & exhalent une odeur pénétrante assez semblable à celle du pain brulé.

Enfin il y en a beaucoup qui par une forte ébul-

* Pl. II. Fig. 7. † Pl. II. Fig. 11.

ébullition se dissolvent entierement dans l'eau commune, ou encore plus aisément dans les liqueurs spiritueuses.

Pour examiner les pierres nues & détachées des parties qui les environnent, j'ai eu besoin d'une bonne Loupe & d'un Microscope à trois verres; mais pour les observer avec toutes leurs dépendances, il m'a fallu d'autres secours, car étant ordinairement accompagnées de vaisseaux d'une finesse extrême, ces vaisseaux s'affaissent les uns sur les autres, si-tôt qu'on les tire de l'eau, & ne forment alors qu'un peloton auquel on ne peut rien connoitre, ce qui m'obligea de chercher un moyen commode pour les examiner flotant dans l'eau: rien ne m'a mieux réussi que de border une glace avec de la cire, & de mettre la piece que je voulois observer nageant dans l'eau avec laquelle j'avois rempli ce petit bassin. Il est bon de remarquer en passant, que les liqueurs flegmatiques, pourvu qu'elles soient bien claires, sont préférables aux spiritueuses, parce que ces dernieres s'évaporant aisément, sur-tout lorsqu'elles sont exposées au Soleil, forment par une partie de ces exhalaisons qui se condensent sur la lentille du Miscroscope, une espece de brouillard qui nuit beaucoup à l'Observateur.

Ayant donc examiné de la maniere dont je viens de parler, quelques pierres garnies de la matiere qui les environnoit, & que j'avois tirées des fruits qui avoient maceré fort longtems, j'apperçus un nombre prodigieux de fibres que je crois être des vaisseaux très

fins,

fins, † qui étoient disposées en maniere de rayons autour de chaque pierre, avec quelque autres vaisseaux beaucoup plus gros, qui quelquefois venoient se terminer & se perdre, pour ainsi dire, à une pierre; d'autres fois ils en sortoient ou sans s'y étre divisés, & presque aussi gros qu'ils y étoient entrés, ou après s'y être divisés en trois ou quatre branches.

J'ai remarqué que pour faire ces observations, il falloit prendre des fruits qui eussent atteint leur grosseur, car on ne pourroit pas découvrir cet épanouïssement de vaisseaux dans les jeunes fruits ; ces vaisseaux ne se dévelopent pas tout d'un coup, il est même un tems où on ne peut presque les y appercevoir.

Immédiatement après que les Poires sont nouées, je n'ai pu découvrir dans leur intérieur, comme je l'ai remarqué, qu'une substance blanchâtre & uniforme où les principes des pierres & des vaisseaux sont confondus.

Quelque tems après, lorsque les pierres commencent à se diviser par grains, ces petits vaisseaux ne sont gueres apparens.

Enfin on commence à les appercevoir lorsque les pierres prennent une certaine solidité, mais c'est encore bien confusément, ils sont courts, gros, & assez solides, de la même couleur que les pierres, ce qui fait qu'on a bien de la peine à les distinguer d'avec elles; mais peu à peu, & à mesure que la Poire approche de sa maturité, ces vaisseaux s'emplissent de liqueur, s'émincissent, s'allon

† Fig. 6.

longent, s'attendriſſent & blanchiſſent, pendant que les pierres durciſſent, deviennent opaques, & rougiſſent un peu, ce qui fait qu'on peut alors diſtinguer beaucoup plus aiſément ces deux parties. C'eſt dans ce tems que par le ſecours des macerations, on découvre la route, la multitude & la diſpoſition des vaiſſeaux, tels que nous venons de les décrire.

† On voit encore aſſez diſtinctement ce même arrangement dans un petit morceau de Poire coupé très mince, en l'examinant avec un Microſcope à trois verres.

Il ne faut pas croire que ce que je viens de dire de ces pierres ſe rencontre ſeulement dans les Poires qu'on appelle communément *pierreuſes*: je les ai trouvées dans la Magdelaine d'Eté, la Virgouleuſe & l'Ambrette, qui ſont des fruits fondans, auſſi-bien que dans le Bon-chrétien & le Saint-Martial, qui en ſont de caſſans; cependant elles ſont plus groſſes & plus ſenſibles dans les dernieres que dans les premieres.

On ſouhaitera peut-être ſavoir comment ſe forment certaines groſſes pierres qui ſe trouvent par accident dans quelques Poires; mais comme je crois qu'à cela près qu'elles prennent plus de nourriture, elles croiſſent de la même maniere que les autres pierres, je me réſerve à en parler, lorſque je donnerai mes conjectures, qui s'étendront ſur les unes & les autres en même tems.

Ainſi, pour le préſent, je me contenterai de

† PL. II. Fig. 12.

de remarquer qu'il ne manque presque jamais de s'y aboucher un, deux, ou trois gros vaisseaux, quand même ces pierres se trouveroient dans le tissu pierreux, lieu où les vaisseaux sont ordinairement très fins.

A cette occasion on peut encore observer, que quand les pierres se trouvent dans le tissu pierreux, il n'y a ordinairement en cet endroit ni épiderme, ni corps muqueux, mais seulement une espece de gale qui est fortement attachée aux pierres, ce qui n'est pas surprenant; car ces grosses pierres, qui sont de la nature des exostoses, ou de quelque autre concrétion osseuse, sont occasionnées ordinairement par un coup de grêle, la picquûre d'un insecte, ou quelques autres causes extérieures qui détruisent l'épiderme & le corps muqueux: or, comme nous l'avons remarqué en parlant de ces membranes, elles ne se régenerent point, quand le corps muqueux a été détruit jusques sur le tissu pierreux.

Depuis que nous parlons de ces petits corps durs qui sont répandus en si prodigieuse quantité dans les Poires, je leur ai toujours donné le nom de *pierres*, mais ce n'est que pour me conformer au langage ordinaire: je n'ai garde de les confondre avec les pierres minerales ou fossiles, ni même avec les pierres qu'on trouve dans les reins & la vessie des Animaux; elles se forment bien differemment.

Les pierres minerales ne sont point des corps organisés qui reçoivent leur nourriture par l'entremise des vaisseaux.

Un

Un suc pétrifiant, peut-être de la nature du crystal ou de la sélénite, pénetre de la terre, du bois, des coquillages, & ces corps deviennent ainsi des pierres.

Ce n'est point non plus une cause intérieure qui les fait grossir, la chose est bien plus simple: ce sont des incrustations de la même matiere à peu près que celles du noyau de la pierre, & qui s'endurcissent de la même maniere ; ainsi le volume de la pierre augmente à mesure qu'il s'en forme de nouvelles.

Pour peu qu'on fasse attention à nos observations, on reconnoitra que les pierres de nos Végétaux (car je conserve le terme en faveur de l'usage) ne grossissent point par des incrustations, mais par les sucs que leur charrient le nombre prodigieux de vaisseaux qui viennent y aboutir. Pourquoi en effet tant & de si gros vaisseaux qui aboutissent principalement à ces pierres monstrueuses, qui les pénetrent, & en sortent divisés en trois ou quatre ramifications, s'ils ne servoient en rien à leur accroissement?

Pourquoi ce nombre prodigieux de petits vaisseaux qui forment des rayons autour de ces pierres, sinon pour charrier la liqueur de quelques sécrétions?

Enfin si ces pierres étoient formées par incrustations, pourquoi n'appercevrions-nous pas ces lames qui en font le caractere?

Pour établir encore plus la difference entre nos pierres & les minerales, nous pourrions dire que celles-ci brulent au feu, & se dissolvent pour la plupart par l'ébullition, ce qui

qui n'arrive pas ordinairement aux pierres minerales.

Il paroît donc probable que les pierres de nos Poires sont des corps organisés.

Il reste encore deux questions aussi curieuses & aussi embarrassantes l'une que l'autre: comment ces pierres ont-elles été formées, & pourquoi l'ont-elles été?

Nous avons remarqué que les Poires, immédiatement après être nouées, n'avoient point de pierres; que peu de tems après elles en étoient toutes remplies; & qu'enfin, lorsqu'elles étoient grosses & approchantes de leur maturité, ces pierres disparoissoient presque entierement. Ces circonstances rendent la premiere question embarrassante; car enfin d'où viennent-elles, quand elles commencent à paroître? & que deviennent-elles, quand on ne les apperçoit plus? D'un autre côté, les usages deviennent ainsi compliqués plusieurs ensemble; car est-il probable qu'un corps qui change si visiblement de consistance & de nature, produise constamment les mêmes effets.

Pour essayer de satisfaire à l'une & à l'autre question, je commence à examiner les pierres dès leur origine, dans le tems qu'elles n'ont pas encore cette solidité qui les rend si sensibles & si aisées à découvrir, lorsqu'on ne les distingue encore que parce qu'elles sont d'une substance plus serrée que le reste de la Poire, en un mot, telles qu'elles paroissoient dans les fruits nouvellement noués. Que sont-elles alors? pour moi je les regarde comme des pelotons de vaisseaux ou des

des glandes; leur figure & leur tiſſu ſemblent en être des caracteres bien marqués, auſſi-bien que leur ſituation par rapport aux autres vaiſſeaux: mais de plus, les differentes liqueurs qui doivent ſervir à la formation de l'amande n'en ſuppoſent-elles pas, puiſque la préparation des liqueurs eſt du reſſort des glandes? J'ajouterai encore, ſi l'on peut ſe ſervir de comparaiſon, que la matrice des Animaux en eſt toute tapiſſée intérieurement.

Ces petits grains, dans le tems qu'ils ſont mols, ſont donc des glandes qui doivent préparer quelques liqueurs dans leſquelles par conſéquent les ſucs du Poirier doivent circuler.

Or ces ſucs ſont viſqueux & très tartareux, & les vaiſſeaux dans leſquels ils doivent circuler, ſont d'une fineſſe extrême & fort repliés, ce qui me fait ſoupçonner qu'un ſédiment analogue au Tartre, s'attache peu à peu aux parois intérieures de ces petits vaiſſeaux, en diminue le diametre, & commence à leur donner cette ſolidité que nous remarquons dans les jeunes fruits. Pour-lors les liqueurs, qui ne peuvent paſſer en ſi grande abondance, refluent en quelque maniere ſur elles-mêmes, dilatent les vaiſſeaux, & ſe forment de nouvelles routes par des vaiſſeaux lateraux qu'elles dilatent auſſi, leur donnent plus de volume en longueur & en diametre, ce qui les rend plus aiſés à appercevoir, & augmente conſiderablement la groſſeur du fruit.

J'ai dit encore, que lorſque les Poires approchoient de leur maturité, les pierres de-

ve-

venoient presque insensibles, quoiqu'elles fussent en aussi grand nombre, aussi grosses & plus dures: la cause en est la même.

L'obstruction * produit le reflux des liqueurs dans les vaisseaux, le reflux augmente le volume des vaisseaux: par l'augmentation du volume des vaisseaux, les pierres se trouvent plus écartées les unes des autres, ce qui fait qu'elles sont moins sensibles, quoique par le progrès de cette obstruction elles se soient considerablement endurcies.

Toutes les pierres n'acquiérent cependant pas la même dureté, car on en trouve qui sont très dures, d'autres qui ne le sont que médiocrement, pendant que quelques-unes sont tout à fait molles, comme dans les fruits nouvellement noués. C'est de ce plus ou moins de pierres endurcies que vient la difference des Poires pierreuses d'avec celles qui ne le sont pas, & le plus ou moins de pierres endurcies dépend peut être du plus ou moins de Tartre qui est charrié avec les liqueurs, comme le prouvent les observations suivantes.

Premierement, les pierres considerablement endurcies sont en plus grand nombre dans les Poires cassantes que dans les fondantes, parce que le Tartre y est dissous dans moins de fluide, & par conséquent s'arrête plus

* Il ne faut pas prendre le terme d'*obstruction*, comme on le prend ordinairement, pour exprimer un effet contre nature, ou, ce qui est la même chose, une maladie; car je ne lui fais signifier autre chose que la diminution du diametre des vaisseaux, telle qu'elle arrive dans les os, lorsqu'ils s'endurcissent.

plus aiſément dans les petits vaiſſeaux qui formoient les glandes.

2°. C'eſt pour cette même raiſon que les fruits dans les terreins ſecs ſont plus pierreux que dans d'autres.

3°. Les coups de grêle peuvent occaſionner en quelques endroits une groſſe pierre, parce que l'obſtruction étant une fois commencée, le Tartre s'y arrête plus aiſément.

4°. Les Poires d'Été ſont moins ſujettes à avoir des pierres que celles d'Automne, parce que les liqueurs circulant avec plus de rapidité, le Tartre ne s'y dépoſe pas ſi aiſément.

J'ai conſideré les pierres dans deux états; ſavoir, lorſqu'elles ſont encore molles, & j'ai commencé à prouver qu'elles faiſoient alors la fonction de glandes.

Le ſecond état où je les ai conſiderées, c'eſt lorſqu'elles commencent à s'obſtruer, & j'ai dit qu'alors elles occaſionnoient un reflux qui ſervoit beaucoup à augmenter le volume des fruits. Lorſque je parlerai des vaiſſeaux, j'aurai occaſion de juſtifier les uſages que j'ai attribué à nos pierres dans l'un & l'autre état: mais on peut encore les conſiderer dans un troiſieme, c'eſt-à-dire, lorſqu'elles ſont tout-à-fait obſtruées, car je crois qu'elles ne ſont pas alors tout-à-fait inutiles dans la Poire, & après avoir fait dans le jeune fruit l'office de glande, elles peuvent faire enſuite celui d'os, & ſervir de points d'appui aux fibres, qui ſans cela n'auroient point eu de ſoutien à cauſe de leur longueur.

Par

Par exemple, les fruits qui n'ont point ces ſortes de points d'appui, comme les Pêches, les Abricots & les Pommes, n'ont pas la ſolidité des Poires.

Dans les Poires même, celles qui n'ont qu'une petite quantité de pierres qui s'endurciſſent, comme les Poires fondantes, n'ont pas la ſolidité des autres, qu'on appelle à cauſe de cela les *Poires caſſantes*.

Encore une choſe qu'il eſt bon d'obſerver, c'eſt que dans le tems que l'arbre eſt le plus occupé à la formation du pepin, c'eſt-à-dire, lorſque le fruit noue, & un peu après, les glandes ſont molles, & rempliſſent preſque tout le fruit, elles ne s'obſtruent & ne durciſſent que peu à peu, de ſorte qu'elles n'ont acquis leur parfaite ſolidité que lorſque le pepin eſt preſque parvenu à ſa groſſeur, & c'eſt alors que le fruit prend la ſienne.

Je ne prétends pas dire qu'il ne circule plus de liqueur dans les pierres, lorſqu'elles ont une fois acquis une certaine ſolidité; il faut bien que les liqueurs circulent dans les os, qui ſont infiniment plus durs, puiſqu'ils croiſſent dans les jeunes-gens, & ſe régénerent à tout âge à l'occaſion des fractures.

Nous nous ſervirons de cette circulation pour expliquer la formation de ces pierres monſtrueuſes, qui comme des eſpeces d'anquiloſes, ſont produites par une trop grande affluence de ce ſuc tartareux auquel nous attribuons la formation des pierres.

Il eſt naturel que les glandes que nous avons fait remarquer dans les differentes parties de la Poire, operent des ſécrétions parti-

ticulieres, ſuivant les places qu'elles occupent dans le fruit ; par exemple, celles du tiſſu pierreux, la liqueur de la tranſpiration ; celles de la ſubſtance pierreuſe, les liqueurs qui ſervent à la formation du pepin : mais nous avons cru plus à propos de remettre à en parler, lorſque nous examinerons les parties auxquelles elles ſont jointes le plus immédiatement.

DES ECHANCRURES DU CALICE.

Le calice de la fleur du Poirier a dans la circonference de ſon bord, cinq échancrures ou découpures, qui ſubſiſtent ordinairement autant que le fruit ; elles forment à l'extrémité de ſon axe, oppoſée à celle qui s'unit avec la queue, une eſpece de couronne à l'antique, qui entoure & borde en quelque maniere la partie du fruit que nous avons appellée l'*ombilic.*

† Par l'examen particulier que j'ai fait de ces eſpeces d'appendices, j'ai reconnu qu'elles ſont formées des trois tégumens, dont l'anatomie a fait le ſujet du commencement de ce Mémoire ; & c'eſt leur dépendance des envelopes de notre fruit, qui m'a fait juger qu'il ſeroit à propos d'en faire la deſcription dans la partie même de mon Mémoire, où je me ſuis propoſé d'examiner les tégumens.

‡ J'ai fait remarquer, en parlant des pierres, que la partie intérieure de la roche étoit formée par l'allongement du canal pierreux, qui

† Pl. I. Fig. 1. ‡ Pl. II. Fig. 9.

qui s'épanouït par ſon extrémité en maniere de trompe: c'eſt des bords de cet évaſement que partent les eſpeces d'apophyſes ou allongemens pierreux, qui étant recouverts par une duplicature de l'épiderme & du corps muqueux, forment les appendices de l'ombilic, ou, ce qui eſt la même choſe, les échancrures du calice.

Si les pierres font l'office de glandes avant qu'elles ſoient endurcies, la grande quantité qu'on en trouve à l'ombilic de la Poire mûre, nous indique qu'il y avoit beaucoup de glandes en cet endroit, lorſque le fruit étoit encore fort jeune. En ſera-t-on ſurpris, ſi l'on fait attention que dans le tems de la fleur, c'eſt en cet endroit que toutes les étamines & les pétalles prenoient leur naiſſance: mais lorſqu'après le deſſechement des étamines & des pétalles, ces glandes s'endurciſſent, devenues alors des corps ſolides ou des eſpeces, d'où elles communiquent leur ſolidité aux appendices du calice; aſſez ſouvent même cet endurciſſement eſt ſi grand que le ſuc nourricier ne pouvant paſſer au corps muqueux, cette membrane devient comme caleuſe, & s'attache ſi fortement aux pierres & à l'épiderme, que ces trois tégumens ne font qu'un corps qui devient coriace à peu près comme des ongles.

J'ai encore remarqué que quelques-uns des pédicules des étamines s'endurciſſent quelquefois, & pour-lors ils ſont beaucoup plus gros que dans le tems de la fleur, & reſtent attachés aux parois de l'ombilic juſqu'à l'entiere deſtruction du fruit.

DU TISSU FIBREUX DE LA PEAU.

Sous le tiſſu pierreux, on apperçoit une ſubſtance plus ferme que le reſte de la Poire, & dans laquelle les pierres ſont enchaſſées, à peu près de la même maniere que quelques Anatomiſtes ont prétendu que le ſont ſur le cuir, les glandes miliaires des Animaux.

Pour découvrir la ſtructure de cette ſubſtance, il faut après avoir levé l'épiderme, le corps muqueux & le tiſſu pierreux d'une Poire macerée, ſeringuer de l'eau ſur ſa ſuperficie: mais il faut que cette Poire nage dans l'eau, & en ſoit même couverte de deux à trois lignes, afin que les vaiſſeaux qu'on veut appercevoir ne s'affaiſſent pas les uns ſur les autres, & que ceux qu'on détruit ſe détachent & ſe dégagent plus aiſément d'entre les gros.

† De cette maniere je l'ai reconnue formée d'un laſſis d'aſſez gros vaiſſeaux qui s'anaſtomoſent fort ſouvent les uns avec les autres, & qui pour cette raiſon ne peuvent être détachés ni épanouïs comme ceux du reſte de la Poire, ce qui fait qu'on eſt obligé de détruire toute cette ſubſtance, lorſqu'on veut examiner les vaiſſeaux.

Par cet examen, on reconnoit donc dans cette ſubſtance une ſtructure aſſez particuliere, pour être diſtinguée du reſte de la Poire: j'ai cru ne pouvoir mieux la comparer qu'au cuir des Animaux, ou, ce qui eſt la même cho-

† PL. I. Fig. 8.

chose, à la peau proprement dite, ou encore au tissu fibreux de la peau, parce que cette envelope dans les Animaux, comme dans notre fruit, est un lassis & un entrelassement très serré de vaisseaux.

Il y a cependant cette difference, que la pierre n'ayant pas à beaucoup près tant d'especes de vaisseaux que les Animaux, son tissu fibreux & son cuir ne peuvent être ni si forts, ni si distincts.

J'aurois encore plusieurs choses à faire remarquer sur la structure de ce tégument, mais c'est un détail dans lequel on ne peut bien entrer, sans avoir donné une idée des vaisseaux; c'est pourquoi il suffit pour le présent d'avoir caractérisé cette quatrieme & derniere envelope que j'ai appellée le *tissu fibreux de la peau* de la Poire.

Il est bon, avant de terminer cette premiere Partie, d'observer encore, que les quatre tégumens dont nous avons donné la description, composent la peau de la Poire de telle sorte, que par sa partie, que nous avons appellée l'*epiderme*, elle met le fruit à couvert de plusieurs accidens auxquels sans cela il seroit exposé.

Par son corps muqueux & son tissu pierreux ou glanduleux elle opere la transpiration, qui est une des principales opérations de la peau.

Enfin par cet entrelassement de vaisseaux que nous avons appellé son *tissu fibreux*, elle peut retenir le fruit dans les bornes de sa crue; & c'est peut-être lorsque ce tissu est attaqué de quelques maladies d'un côté, qu'en

ne prenant ſa nourriture que du côté oppoſé il devient contrefait.

REMARQUE.

Mrs. Malpighi, Grew, Leuwenhoeck & Ruiſch, ces illuſtres Obſervateurs, ont travaillé ſur l'anatomie de la Poire, & leurs recherches m'ont été d'une grande utilité.

Je voudrois qu'il me fût poſſible de rendre juſtice à leurs découvertes dans le corps de mon Mémoire; mais comment (dans un Mémoire qui ne peut avoir qu'une certaine étendue, pour être inſeré dans ceux de l'Académie) entreprendre de faire, pour ainſi dire, la concorde de ces quatre grands Obſervateurs, ou même la critique des uns par les obſervations des autres? La choſe m'a paru impoſſible, c'eſt pourquoi je me ſuis contenté de les citer dans les principaux endroits, en mettant par renvoi au bas des pages le nom de celui de ces Auteurs qui m'a paru avoir le mieux obſervé la partie dont il s'agira dans chaque article, ſans cependant prétendre indiquer par-là qu'il y ait une conformité parfaite entre ce qu'a obſervé l'Auteur cité, & ce que je rapporte dans mon Mémoire. Il pourroit bien cependant m'échaper quelques endroits remarquables des Obſervations de M. Grew, parce que, comme ſon Ouvrage eſt écrit en Anglois, je n'ai pu avoir qu'une legere idée de ce qui eſt contenu dans ſon Livre *in-folio*.

EXPLICATION DES FIGURES.

PREMIERE PLANCHE.

Figure 1re. La Poire en entier, où l'on peut remarquer,

a, ſa queue, ou ſon pédicule.

b, ſon corps.

c, ſa tête, ou ſon nombril, ou ſon œil.

Fig. 2. Un petit morceau de Poire où l'on voit

a, des petites élevures d'épiderme groſſies au Microſcope.

Fig. 3. Un petit morceau de la pelure d'une Poire, pour faire voir les inégalités qu'on apperçoit ſur la ſuperficie de la plupart des Poires, quand on les examine avec la Loupe.

Fig. 4. Un morceau d'épiderme vu au Microſcope, où l'on apperçoit de deux eſpeces de trous pour laiſſer paſſer la tranſpiration; les uns plus grands, qui font comme un réſeau, & les autres plus fins, qui font comme un fond de ſable.

Fig. 5. Le corps muqueux vu au Microſcope, où l'on apperçoit,

a, les mêmes trous qu'à l'épiderme, mais moins apparens.

b, quelques glandes du tiſſu pierreux.

Fig. 6. Le tiſſu pierreux ou glanduleux qui eſt ſous le corps muqueux.

Fig. 7. Le même tiſſu pierreux vu au Microſcope, où l'on peut remarquer de gros vaiſſeaux qui vont répondre à quelques-unes

b, les gros vaiſſeaux.

Fig. 7. Une pierre pareille, tirée d'un jeune fruit, vue au Microſcope.

a, les vaiſſeaux, qui ſont fort courts.

b, la pierre, qui n'eſt pas encore bien endurcie.

Fig. 8. Le canal pierreux, qui eſt quelquefois tout d'une piece.

a, ce canal.

b, un ſtilet qui paſſe dans l'ouverture par laquelle les piſtils doivent paſſer.

Fig. 9. La continuation de ce canal, qui fait la portion interne de la roche.

a, le noyau de la roche.

b, un des piſtils deſſeché qui paſſe au travers.

Fig. 10. Le même noyau coupé ſuivant ſa longueur, pour faire voir,

a, les piſtils deſſechés qui le traverſent.

Fig. 11. Une groſſe pierre du canal pierreux vue au Microſcope.

a, des vaiſſeaux devenus pierreux, & qui joignent enſemble les differentes pierres *b*, *b*, *b*, *b*.

OB-


56.



ne

fo

fa

lo

re


m. de l'Acad. 1730 Pl. 25 Pag. 466.
7
Fig. 4.
5.
a
b
Fig. 6.
NAPOLI


c
d
b
l
Fig. 6.
a
b
Fig. 5.
b
a
c
Fig. 7.
a
b


12.
a
b
Fig. 11.
b



OBSERVATION ANATOMIQUE SUR UNE ALTERATION SINGULIERE DU CRISTALLIN ET DE L'HUMEUR VITRÉE.

Par M. MORAND.

UN Homme de quarante ans, mort à l'Hôpital de la Charité le 31 Juillet de la présente année, d'une Hydropisie ascite, avoit à l'Oeil gauche une Cataracte jaune, qui paroissoit vieille, & faisoit une grande difformité. Je fus curieux d'examiner cet Oeil, dans lequel je croyois trouver un Crystallin opaque, comme dans les Cataractes ordinaires; mais lorsqu'il fut détaché de l'orbite & dissequé exactement, j'y trouvai plusieurs choses si singulieres, qu'elles me parurent mériter la description que j'en donne.

Cet Oeil détaché de l'orbite, & dépouillé des muscles & des graisses qui l'environnent (*Fig. A*) n'étoit point de la forme ordinaire: vu pardevant, il étoit plus quarré que rond; il avoit sur sa surface quatre enfoncemens ou sillons paralleles au plan des quatre muscles droits. Comme tout le globe étoit maigre & atrophié, je jugeai que la contraction de ces muscles avoit fait ces enfoncemens, faute de résistance de la part des parties intérieures de l'Oeil.

l'Oeil. Au travers de la Cornée tranſparente, l'Iris paroiſſoit plus large en haut qu'en bas, & l'ouverture de la Prunelle preſque régulierement quarrée.

Après l'examen ſuperficiel de cet Oeil, je fis une coupe circulaire du globe, à deux lignes au-delà du rebord de la Cornée tranſparente, pour partager tout l'Oeil en deux hémiſpheres, dont l'antérieur ſeroit plus petit. La Sclérotique & la Choroïde étant entamées par cette coupe, je fus ſurpris de voir qu'il ne s'écoulât ni humeur aqueuſe, ni rien qui pût reſſembler à quelque portion de l'Humeur vitrée; je fis de tout le globe de l'Oeil deux pieces (*Fig. B C.*): la piece *B* me donna la face poſterieure de l'Iris & du Cryſtallin; le Cryſtallin étoit d'une couleur blanche tirant ſur le jaune, & de la conſiſtance de la pierre la plus dure.

Il me parut plus ovale que rond (*Fig. D.*). A une partie de ſon bord ſuperieur, il étoit comme uſé en quelques endroits; ayant eſſayé de l'ôter de ſa place, je le trouvai retenu à ſa partie inferieure par la membrane cryſtalline qui étoit tranſparente, & qui adhéroit à l'Iris dans preſque toute ſa circonference (*Fig. E.*). Je détachai le Cryſtallin de cette membrane pour voir ſa face antérieure (*Fig. F.*) ſur laquelle étoit une pellicule membraneuſe & opaque que j'enlevai aiſément.

Cette pellicule recouvroit une petite cavité (*Fig. G.*) ſituée horizontalement, eu égard à la poſition de l'Oeil dans l'Orbite, & creuſée dans l'épaiſſeur du Cryſtallin même; à

à cette face anterieure le Cryſtallin étoit plus plat qu'à la poſterieure.

La coupe de l'hémiſphere poſtérieur (*Fig. C.*) montroit le chaton de l'Humeur vitreé bien marqué & parfaitement proportionné au Cryſtallin qui tenoit à l'autre coupe; mais au-lieu de l'Humeur vitrée qui auroit dû remplir cet hémiſphere, je vis d'abord une ſubſtance gélatineuſe, de couleur cendrée, d'une conſiſtance aſſez ferme, dont la couche étoit épaiſſe de demi-ligne, & cette matiere (*Fig. L.*) compoſoit le chaton qui recevoit le Cryſtallin pierreux. Le chaton étoit entouré des fibres ciliaires, mais fort irrégulierement arrangées (*Fig. C.*). Cette matiere gélatineuſe, qui étoit apparemment un reſte d'Humeur vitrée, étoit envelopé d'une membrane très déliée, & recouvroit un petit Os dont le fond du globe étoit rempli, laiſſant cependant entre ce petit Os & la Sclérotique un eſpace auquel il eſt vraiſemblable d'attribuer la facilité que les muſcles droits ont eu de faire ſur le globe les quatre dépreſſions paralleles à leur plan. La Sclérotique, beaucoup plus épaiſſe & plus dure que dans l'état naturel, étoit intérieurement revêtue de la Choroïde, à l'ordinaire.

L'Os qui tenoit la place de l'Humeur vitrée, avoit du côté du Nerf optique la forme d'un culot moulé dans le fond du globe (*Fig. H*). En tenant l'Oeil par le Nerf optique, ce culot étoit ſuſpendu par un petit cordon mollaſſe que formoit la Rétine avant ſon épanouïſſement, & par une coupe de la Sclérotique on voyoit bien que ce cordon ve-

venoit du Nerf optique (*Fig. I*). Du côté le plus large, & qui regarde le Cryſtallin, ce petit Os étoit creuſé & recouvert de la matiere gélatineuſe qui formoit le chaton du Cryſtallin.

La *Fig. M.* repréſente cette cavité, qui en quelques endroits étoit revêtue de quelques portions de la Rétine. La *Fig. N.* montre la face poſterieure du culot, où l'on voit le trou rond dont il étoit percé pour le paſſage de la Rétine. A une des faces de côté il y avoit un autre trou (*Fig. O.*) par où reſortoient quelques filets de la Rétine, qui s'attachoient à la Choroïde. Ce petit Os eſt plus épais dans quelques endroits que dans d'autres, & compoſé de fibres abſolument oſſeuſes, dont le tiſſu eſt irrégulier, & qu'on a tâché de rendre ſenſible dans les trois Figures *M. N. O.*

Cette alteration du Cryſtallin & de l'Humeur vitrée étant digne de remarque, j'ai fait tout ce que j'ai pu pour en découvrir la cauſe, & par les perquiſitions que j'ai faites, j'ai appris que le Sujet incommodé étoit borgne depuis plus de vingt ans; qu'à l'âge d'environ quinze ans il avoit eu ſur cet Oeil une fluxion violente, à la ſuite de laquelle s'étoit formée une Cataracte jaune, & que pluſieurs Oculiſtes lui ayant offert d'en faire l'operation, il n'avoit jamais voulu la ſouffrir. Un Oculiſte, qui au-lieu des parties molles & preſque fluides, telle que l'Humeur vitrée, auroit rencontré un Os avec ſon Aiguille, auroit été bien déconcerté. Il ne ſera peut-être pas inutile à ceux qui ſe mêlent de

de l'opération de la Cataracte, de connoitre cet exemple, quoique rare & peut-être le seul, d'une Ossification dans le globe de l'Oeil.

METHODE

Pour déterminer le sort de tant de Joueurs que l'on voudra, & l'avantage que les uns ont sur les autres, lorsqu'ils jouent à qui gagnera le plus de parties dans un nombre de parties déterminé.

Par M. NICOLE. *

DANS le Mémoire que je lus, il y a quelques jours, j'ai déterminé le sort de deux Joueurs, & l'avantage de l'un sur l'autre, pour tel nombre de parties que ce soit. Je me suis servi dans ce Mémoire de la méthode analytique; & en parcourant toutes les Equations que la nature des differentes questions fournit, j'ai fait voir de quelle maniere elles conduisent à la solution de chaque cas. La comparaison des grandeurs résultantes de chaque solution de ces differens cas, fait ensuite découvrir la loi selon laquelle ces grandeurs croissent, & donne la solution générale pour un nombre de parties quelconque.

Dans le Mémoire que je donne aujourd'hui, je me sers aussi d'abord de la même méthode analytique: mais les differens cas que l'on est

* 29 Mars 1730.

est obligé d'examiner, devenant bien-tôt fort composés, & par-là le nombre des Equations dont il faut faire usage, devenant très grand, j'abandonne cette méthode, qui n'a donné la solution que de quelques cas particuliers, & en donne une autre beaucoup plus simple, & qui satisfait à tous les cas possibles que l'on peut proposer sur cette matiere. Cette nouvelle maniere de proceder fournit encore une autre utilité; c'est une méthode générale pour élever un Multinome composé de tant de parties que l'on voudra, à une puissance quelconque, beaucoup plus simple, & qui demande considerablement moins de calcul que les méthodes ordinaires.

PROBLEME I.

Trois Joueurs, dont les forces sont entre elles, comme les grandeurs p, q, m, *jouent ou parient à qui gagnera le plus de fois en un nombre déterminé de parties. On demande le sort de chacun de ces Joueurs, & l'avantage du Joueur le plus fort sur chacun des autres.*

SOLUTION.

Si l'on nomme a l'argent qui est au jeu, ou la mise des trois Joueurs, & si l'on suppose qu'ils jouent en une partie, le sort du 1er.

Joueur sera $\frac{\overset{1.0.0.}{p\times a} + \overset{0.1.0}{q\times o} + \overset{0.0.1}{m\times o}}{p+q+m} = \frac{ap}{p+q+m}$.

Celui du second. . . . . $\frac{aq}{p+q+m}$.

Celui du troisieme. . . . . $\frac{am}{p+q+m}$.

Où

Où il faut remarquer que les nombres 1.0.0, 0.1.0 & 0.0.1 qui sont écrits au-dessus de chaque terme de la quantité qui exprime le sort du premier Joueur, indiquent le nombre de parties que chaque Joueur a gagné; par exemple, 1.0.0 exprime que le premier Joueur a gagné une partie, & les deux autres n'en gagnent point, ce qui doit être entendu pour la suite de ce Mémoire; 3. 2. 1 exprimera de même, que le premier Joueur a gagné 3 parties, le second 2 parties, & le troisieme une partie.

Les inconnues f, x, y, z, t, r, &c. expriment ici le sort du premier Joueur, dans les differens états indiqués par les nombres dont on vient de parler, ou, ce qui est la même chose, la partie de l'argent qui est au jeu, laquelle appartient à ce Joueur relativement à chaque état.

Si l'on joue en deux parties,

Le sort du 1er. est $f = \dfrac{\overset{1.0.0}{p\times x} + \overset{0.1.0}{q\times y} + \overset{0.0.1}{m\times z}}{p+q+m}$;

pour déterminer la valeur de f, on a

$$x = \frac{\overset{2.0.0}{p\times a} + \overset{1.1.0}{q\times \frac{1}{2}a} + \overset{1.0.1}{m\times \frac{1}{2}a}}{p+q+m} = \frac{ap + \frac{1}{2}aq + \frac{1}{2}am}{p+q+m},$$

$$y = \frac{\overset{1.1.0}{p\times \frac{1}{2}a} + \overset{0.2.0}{q\times 0} + \overset{0.1.1}{m\times 0}}{p+q+m} = \frac{\frac{1}{2}ap}{p+q+m}, \text{ \&}$$

$$z = \frac{\overset{1.0.1}{p\times \frac{1}{2}a} + \overset{0.1.1}{q\times 0} + \overset{0.0.2}{m\times 0}}{p+q+m} = \frac{\frac{1}{2}ap}{p+q+m}.$$ D'où

l'on

l'on tire $f = \dfrac{\dfrac{app + \frac{1}{2}apq + \frac{1}{2}apm + \frac{1}{2}apq + \frac{1}{2}apm}{2}}{p+q+m}$

$= \dfrac{\dfrac{app + apq + apm}{2}}{p+q+m}$.

Le fort du fecond eft donc ... $\dfrac{\dfrac{aqq + apq + aqm}{2}}{p+q+m}$.

Et celui du troifiéme eft .... $\dfrac{\dfrac{amm + amq + apm}{2}}{p+q+m}$.

Lefquels font entre eux comme pa, qa, ma.

Si l'on joue en trois parties,

Le fort du 1[er]. eft $f = \dfrac{p \times \overset{1.0.0}{a} + q \times \overset{0.1.0}{y} + m \times \overset{0.0.1}{z}}{p+q+m}$;

pour déterminer f, on a $x = \dfrac{p \times \overset{2.0.0}{a} + q \times \overset{1.1.0}{u} + m \times \overset{1.0.1}{t}}{p+q+m}$,

$u = \dfrac{p \times \overset{2.1.0}{a} + q \times \overset{1.2.0}{0} + m \times \overset{1.1.1}{\frac{1}{3}a}}{p+q+m} = \dfrac{ap + \frac{1}{3}am}{p+q+m}$, &

$t = \dfrac{p \times \overset{2.0.1}{a} + q \times \overset{1.1.1}{\frac{1}{3}a} + m \times \overset{1.0.2}{0}}{p+q+m} = \dfrac{ap + \frac{1}{3}aq}{p+q+m}$, donc

$x = \dfrac{\dfrac{app + 2apq + 2apm + \frac{2}{3}aqm}{2}}{p+q+m}$. On a auffi

$y = \dfrac{p \times \overset{1.1.0}{\dfrac{ap + \frac{1}{3}am}{p+q+m}} + q \times \overset{0.2.0}{0} + m \times \overset{0.1.1}{r}}{p+q+m}$,

$r = \dfrac{p \times \overset{1.1.1}{\frac{1}{3}a} + q \times \overset{0.2.1}{0} + m \times \overset{0.1.2}{0}}{p+q+m} = \dfrac{\frac{1}{3}ap}{p+q+m}$, donc

$y =$

$y = \dfrac{app + \frac{2}{3}apm}{\overline{p+q+m}^{\,2}}$. On trouvera auſſi

$$z = \dfrac{\overset{1.0.1}{p} \times \dfrac{ap + \frac{1}{3}aq}{p+q+m} + \overset{0.1.1}{\dfrac{q \times \frac{1}{3}ap}{p+q+m}} + \overset{0.0.2}{m \times o}}{p+q+m}$$

$= \dfrac{app + \frac{2}{3}apq}{\overline{p+q+m}^{\,2}}$. Si donc on ſubſtitue pour x, y & z, les valeurs que l'on vient de trouver, on aura la valeur de $ſ$ pour le ſort du

1er. Joueur..... $\dfrac{ap^3 + 3appq + 3appm + 2apqm}{\overline{p+q+m}^{\,3}}$

pour celui du 2d... $\dfrac{aq^3 + 3aqqp + 3aqqm + 2apqm}{\overline{p+q+m}^{\,3}}$

pour celui du 3me. $\dfrac{am^3 + 3ammq + 3ammp + 2apqm}{\overline{p+q+m}^{\,3}}$

Si l'on joue en quatre parties,

Le ſort du 1er. Joueur ſera $ſ = \dfrac{\overset{1.0.0}{p \times x} + \overset{0.1.0}{q \times y} + \overset{0.0.1}{m \times z}}{p+q+m}$; pour déterminer $ſ$, on aura toutes les Equations ſuivantes; $x = \dfrac{\overset{2.0.0}{p \times u} + \overset{1.1.0}{q \times t} + \overset{1.0.1}{m \times r}}{p+q+m}$,

$x = \dfrac{\overset{3.0.0}{p \times a} + \overset{2.1.0}{q \times k} + \overset{2.0.1}{m \times l}}{p+q+m}$, $k = \dfrac{\overset{3.1.0}{p \times a} + \overset{2.2.0}{q \times \frac{1}{2}a} + \overset{2.1.1}{m \times o}}{p+q+m}$

=

$$= \frac{ap + \frac{1}{2}aq + am}{p+q+m},\ l = \frac{\overset{3.0.1}{p \times a} + \overset{2.1.1}{q \times a} + \overset{2.0.2}{m \times \frac{1}{2}a}}{p+q+m}.$$

Donc $u = \dfrac{app + 2apq + 2apm + 2aqm + \frac{1}{2}aqq + \frac{1}{2}amm}{\overline{p+q+m}^{2}}$,

$$z = \frac{\overset{2.1.0}{p \times \overline{\dfrac{ap + \frac{1}{2}aq + am}{p+q+m}}} + \overset{1.2.0}{q \times g} + \overset{1.1.1}{m \times b}}{p+q+m},$$

$$g = \frac{\overset{2.2.0}{p \times \frac{1}{2}a} + \overset{1.3.0}{q \times 0} + \overset{1.2.1}{m \times 0}}{p+q+m} = \frac{\frac{1}{2}ap}{p+q+m},$$

$$b = \frac{\overset{2.1.1}{p \times a} + \overset{1.2.1}{q \times 0} + \overset{1.1.2}{m \times 0}}{p+q+m} = \frac{ap}{p+q+m},$$ donc

$$t = \frac{app + apq + 2apm}{\overline{p+q+m}^{2}},\ r = \frac{\overset{2.0.1}{p \times \overline{ap + aq + \frac{1}{2}am}} + \overset{1.1.1}{q \times ap}}{\overline{p+q+m}^{2}}$$

$$+ \frac{\overset{1.0.2}{m \times f}}{p+q+m},\ f = \frac{\overset{2.0.2}{p \times \frac{1}{2}a} + \overset{1.1.2}{q \times 0} + \overset{1.0.3}{m \times 0}}{p+q+m}$$

$= \dfrac{\frac{1}{2}ap}{p+q+m}$, donc $r = \dfrac{app + 2apq + apm}{\overline{p+q+m}^{2}}$

& $x = \dfrac{ap^{3} + 3appq + 3appm + 6apqm + \frac{3}{2}apqq + \frac{1}{2}ppmm}{\overline{p+q+m}^{3}}$.

Pour déterminer y, on a ces Equations

$$y = \frac{\overset{1.1.0}{p \times \overline{\dfrac{app + apq + 2apm}{\overline{p+q+m}^{2}}}} + \overset{0.2.0}{q \times d} + \overset{0.1.1}{m \times e}}{p+q+m},$$

$d =$

$$d = \frac{\overset{1.2.0}{p \times \frac{\frac{1}{2}ap}{p+q+m}} + \overset{0.3.0}{q \times 0} + \overset{0.2.1}{m \times 0}}{p+q+m} = \frac{\frac{1}{2}app}{\overline{p+q+m}^{2}},$$

$$e = \frac{\overset{1.1.1}{p \times \frac{ap}{p+q+m}} + \overset{0.2.1}{q \times 0} + \overset{0.1.2}{m \times 0}}{p+q+m} = \frac{app}{\overline{p+q+m}^{2}},$$

donc $y = \frac{ap^3 + \frac{3}{2}appq + 3appm}{\overline{p+q+m}^{3}}$, & pour déterminer z, on a

$$z = \frac{\overset{1.0.1}{p \times \frac{app + 2apq + apm}{\overline{p+q+m}^{2}}} + \overset{0.1.1}{q \times \frac{app}{\overline{p+q+m}^{2}}} + \overset{0.0.2}{m \times b}}{p+q+m},$$

$$b = \frac{\overset{1.0.2}{p \times X} + \overset{0.1.2}{q \times 0} + \overset{0.0.3}{m \times 0}}{p+q+q+m},\ X = \frac{\overset{2.0.2}{p \times \frac{1}{2}a} + \overset{1.1.2}{q \times 0} + \overset{1.0.3}{m \times 0}}{p+q+m}$$

$= \frac{\frac{1}{2}ap}{p+q+m}$; donc $b = \frac{\frac{1}{2}app}{\overline{p+q+m}^{2}}$, &

$z = \frac{ap^3 + 3appq + \frac{3}{2}appm}{\overline{p+q+m}^{3}}$. Si donc on ſubſtitue pour x, y & z leurs valeurs, on aura $ſ$, ou le ſort du 1er. Joueur

$$= \frac{ap^4 + 4ap^3q + 4ap^3m + 12appqm + 3appqq + 3appmm}{\overline{p+q+m}^{4}}.$$

Ce-

Celui du 2d. . . . . . . $\dfrac{\dfrac{ap^4 + 4aq^3p + 4aq^3m + 12aqqpm + 3appqq + 3aqqmm}{4}}{p + q + m}$.

Celui du 3me. . . . . . $\dfrac{\dfrac{am^4 + 4am^3p + 4am^3q + 12ammpq + 3appmm + 3aqqmm}{4}}{p + q + m}$.

Lorſque l'on joue en une partie,

Le ſort du 1er. Joueur eſt . . . . $\dfrac{ap}{p + q + m}$.

Celui du 2d. . . . . $\dfrac{aq}{p + q + m}$.

Celui du 3me. . . . . $\dfrac{am}{p + q + m}$.

Lorſque l'on joue en deux parties,

Le ſort du 1er. eſt . . . . $\dfrac{\dfrac{app + apq + apm}{2}}{p + q + m}$.

Celui du 2d. . . . . $\dfrac{\dfrac{aqq + apq + aam}{2}}{p + q + m}$.

Celui du 3me. . . . . $\dfrac{\dfrac{amm + apm + aqm}{2}}{p + q + m}$.

Lorſ-

Lorsque l'on joue en trois parties,

Le sort du 1er. est. . . . . $\frac{ap^3 + 3appq + 3appm + 2apqm}{(p+q+m)^3}$.

Celui du 2d. . . . . $\frac{aq^3 + 3apqq + 3aqqm + 2apqm}{(p+q+m)^3}$.

Celui du 3me. . . . . $\frac{am^3 + 3apmm + 3aqmm + 2apqm}{(p+q+m)^3}$.

Lorsque l'on joue en quatre parties,

Le sort du 1er. est. . . . . $\frac{ap^4 + 4ap^3q + 4ap^3m + 3appq^2 + 3appm^2 + 12appqm}{(p+q+m)^4}$.

Celui du 2d. . . . . $\frac{aq^4 + 4aq^3p + 4aq^3m + 3appqq + 3aqqm^2 + 12apqqm}{(p+q+m)^4}$.

Celui du 3me. . . . . $\frac{am^4 + 4apm^3 + 4aqm^3 + 3appmm + 3aqqm^2 + 12apqm^2}{(p+q+m)^4}$.

Si

Si $p=6$, $q=5$, $m=4$, les ſorts ſeront

pour une partie......	6.	5.	4.
pour deux........	90.	75.	60.
ou............	6.	5.	4.
pour trois........	1428.	1115.	832.
pour quatre.......	22100.	16981.	11754.

REMARQUE.

Si l'on vouloit rechercher le ſort de ces trois Joueurs, pour 5, 6, 7, 8, &c. parties, le nombre des Equations qu'il faudroit parcourir par cette méthode deviendroit fort conſiderable; il en faudroit parcourir encore un bien plus grand nombre, ſi au-lieu de trois Joueurs, on en ſuppoſoit quatre, cinq, ſix, &c. car ces Equations exprimant les differens évenemens qui peuvent arriver dans le cours du Jeu, le nombre de ces évenemens ſera d'autant plus grand, qu'il y aura un plus grand nombre de Joueurs, & qu'ils joueront en un plus grand nombre de parties. Dans tous ces cas composés, la voye des Equations eſt trop longue & trop pénible. Voici une méthode qui ſatisfait à tous les cas, quel que ſoit le nombre des Joueurs, & quel que ſoit le nombre de parties que l'on doive jouer.

PROBLEME II.

Soit, par exemple, quatre Joueurs, dont les forces ſoient exprimées par les grandeurs p, q, m, r. *On demande le ſort de chacun de ces Joueurs, & l'avantage des uns ſur les autres, lorſqu'ils con-*

vien-

viennent de jouer en huit parties; il suffit pour gagner le fond du Jeu, de gagner une partie au moins de ces huit plus qu'aucun des autres Joueurs.

SOLUTION.

On sait que $\frac{p}{p+q+m+r}$ exprime la probabilité que le premier Joueur a de gagner la 1re. partie, que $\frac{pp}{\overline{p+q+m+r}^2}$ exprime celle qu'il a de gagner les deux premieres, & enfin $\frac{p^8}{\overline{p+q+m+r}^8}$ exprime la probabilité qu'il a de gagner les huit parties. Si on ajouté à cette quantité la probabilité que le même Joueur a de gagner sept de ces parties, un quelconque des trois autres Joueurs en gagnant une:

Que l'on ajoute encore à ces deux quantités, la probabilité que ce même Joueur a de gagner six parties, l'un des trois autres Joueurs en gagnant deux, ou deux de ces trois Joueurs en gagnant chacun une :

Qu'à cette somme on ajoute encore la probabilité que le même Joueur a de gagner cinq parties, l'un quelconque des trois autres Joueurs en gagnant trois, ou deux ou une:

Puis la probabilité que le même Joueur a d'en gagner quatre, l'un quelconque des trois autres Joueurs en gagnant quatre, trois, deux ou une:

Et enfin que l'on ajoute encore la probabilité que ce même Joueur a de gagner trois parties, l'un quelconque des trois autres

 Joueurs

Joueurs en gagnant trois, deux ou une; & celle que ce même Joueur a de gagner deux parties, chacun des trois autres Joueurs en gagnant deux:

Il eſt clair que la ſomme formée par l'addition de toutes ces parties, exprimera le ſort de ce 1er. Joueur, ou le droit qu'il a à l'argent qui eſt au Jeu: car cette ſomme eſt formée de toutes les manieres poſſibles que ce Joueur a de gagner; ou tout ce qui eſt au Jeu, lorſqu'il gagne une partie de plus qu'aucun des autres Joueurs; ou la moitié de ce qui eſt au Jeu, lorſqu'un autre Joueur gagne autant de parties que lui; ou enfin le tiers ou le quart de ce qui eſt au Jeu, lorſque deux ou trois des autres Joueurs gagnent autant de parties que lui.

Or, il eſt évident que les nombres qui expriment combien il y a de manieres de prendre huit choſes, 8 à 8, 7 à 7, 6 à 6, 5 à 5, 4 à 4, 3 à 3, & 2 à 2, expriment auſſi le nombre des manieres que ce Joueur a de gagner huit parties, ou ſept, ſix, cinq, quatre, trois, deux.

Or, tout le monde ſait que la ſeptieme bande perpendiculaire du Triangle arithmétique de M. Paſcal fournit tous ces nombres, 1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8. Il ne reſte plus qu'à multiplier ces nombres par ceux qui expriment toutes les varietés qui peuvent arriver aux trois autres Joueurs, pour le nombre des parties qu'ils peuvent gagner, relativement à chaque cas du premier Joueur, & qui multiplient chacun de ces cas. Si donc on nomme *a* l'argent qui eſt au Jeu,

1°. On

1°. On aura $\frac{1 \times p^8 \times a}{\overline{p+q+m+r}^{\,8}}$ pour que ce Joueur gagne les huit parties, $\frac{8 \times p^7 \times \overline{q+m+r}}{\overline{p+q+m+r}^{\,8}}$ pour qu'il gagne ſept parties, chacun des autres Joueurs en gagnant une; car il eſt clair que chacun des autres Joueurs en peut gagner une en huit manieres, ſavoir, ou la 1re partie, ou la 2me, 3me, 4me.... 8me.

2°. On aura $\frac{28 p^6 \times \overline{qq+mm+rr}}{\overline{p+q+m+r}^{\,8}}$ pour que ce Joueur en gagnant ſix, l'un des autres en gagnent deux, car 28 exprime toutes les manieres de gagner ſix parties de huit, & ſur chacune de ces manieres, chacun des autres Joueurs peut gagner les deux autres parties.

3°. On aura $\frac{28 p^6 \times 2 \times \overline{qm+qr+mr}}{\overline{p+q+m+r}^{\,8}}$ pour que ce Joueur en gagnant ſix, deux des trois autres Joueurs en gagnent chacun une; car il eſt clair que ces deux autres peuvent être le 2me & le 3me, le 2me & le 4me, ou le 3me & le 4me, & que dans chaque cas il y a deux manieres.

4°. On aura auſſi $\frac{56 p^5 \times \overline{q^3+m^3+r^3}}{\overline{p+q+m+r}^{\,8}}$ pour que ce Joueur gagnant cinq parties, l'un quelconque des trois autres en gagne trois.

 5°,

5°. Puis $\frac{56p^5 \times 3 \times \overline{qq \times \overline{m+r} + mm \times \overline{q+r} + rr \times \overline{q+m}}}{\overline{p+q+m+r}^8}$

car ce Joueur a 56 manieres de gagner cinq parties des huit, & chacun des autres a trois manieres de gagner deux parties des trois restantes.

6°. Puis $\frac{56p^5 \times 6qmr}{\overline{p+q+m+r}^8}$ pour que ce Joueur gagne cinq parties des huit, chacun des trois autres en gagnant une: car trois choses se peuvent combiner en six manieres.

7°. On aura aussi $\frac{70p^4 \times \overline{q^4+m^4+r^4}}{\overline{p+q+m+r}^8}$ pour que ce Joueur gagnant quatre parties, un quelconque des trois autres en gagne aussi quatre.

8°. Puis $\frac{70p^4 \times 4 \times \overline{q^3 \times \overline{m+r} + m^3 \times \overline{q+r} + r^3 \times \overline{q+m}}}{\overline{p+q+m+r}^8}$

pour que l'un quelconque des trois autres en gagne trois: car il y a quatre manieres pour que cela arrive, quatre choses pouvant être prises 3 à 3 en quatre manieres.

9°. On aura encore $\frac{70p^4 \times 6 \times \overline{qq \times \overline{mm+rr} + mmrr}}{\overline{p+q+m+r}^8}$

pour que deux quelconques des trois autres Joueurs en gagnent chacun deux.

10°.

10°. Puis $\frac{70p^4 \times 6 \times \overline{qq \times \overline{2mr} + \overline{mm} \times \overline{2qr} + rr \times \overline{2qm}}}{\overline{p+q+m+r}^8}$ que l'un quelconque des trois autres en gagne deux, les deux reſtans en gagnant chacun une : car il y a ſix manieres de prendre quatre choſes 2 à 2, & les deux Joueurs reſtans peuvent changer en deux manieres.

11°. On aura auſſi

$$\frac{56p^3 \times \overline{10 \times q^3 \times \overline{mm+rr} + m^3 \times \overline{qq+rr} + r^3 \times \overline{qq+mm}}}{\overline{p+q+m+r}^8}$$

pour que ce Joueur gagnant trois parties, l'un quelconque des trois autres en gagne auſſi trois, chacun des reſtans en gagnant deux : car il y a dix manieres de prendre cinq choſes 3 à 3.

12°. Puis $\frac{56p^3 \times \overline{10q^3 \times 2mr + 10m^3 \times 2qr + 10r^3 \times 2qm}}{\overline{p+q+m+r}^8}$ pour que ce Joueur gagnant trois parties, l'un quelconque des trois autres en gagne auſſi trois, pendant que les deux reſtans en gagnent chacun une : or il y a dix manieres de prendre cinq choſes 3 à 3, & deux manieres d'en arranger deux.

13. Puis $\frac{56p^3 \times \overline{10qq \times 3mmr + 3rrm + 10m^2 \times 3rrq}}{\overline{p+q+m+r}^8}$ pour que ce Joueur en gagnant trois parties, deux quelconques des trois autres Joueurs en gagnent chacun deux, pendant que le Joueur res-

reſtant en gagne une: or il y a dix manieres de prendre cinq choſes 2 à 2, & trois manieres de prendre les trois reſtantes auſſi 2 à 2.

14°. On aura enfin $\frac{28pp \times 15qq \times 6mm \times 1rr}{\overline{p+q+m+r}^{8}}$ pour que ce Joueur gagnant deux parties des huit, les trois autres en gagnent auſſi chacun deux: car il y a quinze manieres de prendre ſix choſes 2 à 2, ſix manieres de prendre quatre choſes 2 à 2, & une maniere de prendre les deux reſtantes 2 à 2.

Il eſt évident que ce ſont-là toutes les manieres qu'a ce Joueur de gagner, puiſque dans toute autre maniere de diſtribuer les huit parties, ce Joueur en gagnera moins que quelques-uns des autres Joueurs.

Il ne reſte plus qu'à diſtinguer entre tous ces cas, quels ſont ceux qui font gagner à ce Joueur tout l'argent qui eſt au Jeu, & quels ſont ceux qui ne lui en font gagner que la moitié ou le tiers, ou le quart: or il eſt viſible qu'il gagne tout, lorſqu'il a pris plus de parties qu'aucun des autres Joueurs; qu'il ne gagne que la moitié, lorſqu'un autre Joueur prend autant de parties que lui; qu'il ne gagne que le tiers de ce qui eſt au Jeu, lorſque deux autres Joueurs gagnent autant de parties que lui; & enfin le quart de ce qui eſt au Jeu, lorſque les trois autres Joueurs prennent autant de parties que lui. Le ſort de ce Joueur ſera donc

$$\frac{\begin{aligned}&ap^8 + 8ap^7 \times \overline{q + m + r} + 28ap^6 \times \overline{qq + mm + rr}\\
&+ 56ap^6 \times \overline{qm + qr + mr} + 56ap^5 \times \overline{q^3 + m^3 + r^3}\\
&+ 168ap^5 \times \overline{qqm + qqr + m^2q + m^2r + r^2q + r^2m}\\
&+ 336ap^5qmr + 35ap^4 \times \overline{q^4 + m^4 + r^4} + 280ap^4\\
&\times \overline{q^3m + q^3r + m^3q + m^3r + r^3q + r^3m} + 420ap^4\\
&\times \overline{q^2m^2 + q^2r^2 + m^2r^2} + 840ap^4 \times \overline{qqmr + m^2qr + r^2qm}\\
&+ 280ap^3 \times \overline{q^3m^2 + q^3r^2 + m^3q^2 + m^3r^2 + r^3q^2 + r^3m^2}\\
&+ 560ap^3 \times \overline{q^3mr + m^3qr + r^3qm}\\
&+ 1680ap^3 \times \overline{qqm^2r + qqr^2m + m^2rrq} + 630appqqmmrr\end{aligned}}{\overline{p + q + m + r}^{\,8}}$$

COROLLAIRE I.

Il eſt évident que ſi dans cette formule, on met q à la place de p, & p à la place de q, elle ſe changera en une autre quantité compoſée, qui exprimera le ſort du Joueur, dont la force ou l'habileté eſt exprimée par q. Car le même raiſonnement qui a été fait pour le premier Joueur, doit être fait pour chacun des autres Joueurs : ainſi en ſubſtituant encore ſucceſſivement pour p les grandeurs m & r, & réciproquement, on aura les ſorts des deux autres Joueurs dont les forces ſont repréſentées par m & r.

COROLLAIRE II.

La quantité compoſée qui a été trouvée pour le ſort du premier Joueur, & qui ex-

 prime

prime dans le cours des huit parties tous les évenemens qui lui ſont favorables, cette quantité, dis-je, étant ajoutée aux trois quantités ſemblables, qui réſultent de la ſubſtitution qui a été faite, leſquelles expriment dans le cours des huit parties, tous les évenemens favorables aux trois autres Joueurs, & qui ſont contraires au premier, la ſomme qui en viendra ſera égale à l'unité ou à l'argent qui eſt au Jeu. Car chacune de ces quantités étant une fraction qui exprime la partie de cet argent qui appartient à chaque Joueur, ſelon le droit qu'il a à cette partie de Jeu, il eſt néceſſaire que toutes ces portions raſſemblées ſoient égales au tout. Or comme chacune de ces fractions a un dénominateur commun, qui dans cet exemple eſt la huitieme puiſſance de $p+q+m+r$, il s'enſuit que les quatre numerateurs pris enſemble, doivent auſſi être égaux à cette huitieme puiſſance. Le même raiſonnement aura toujours lieu, quel que ſoit le nombre de Joueurs, & la quantité de parties que l'on joue.

COROLLAIRE III.

Si l'on nomme A ce qui a été trouvé pour le ſort du 1er. Joueur, & B. C, D, pour les ſorts des autres Joueurs, trouvés par la ſubſtitution ſucceſſive de q, m, r, à la place de p, l'avantage du 1er. Joueur ſur le 2^d^. ſera $A-B$, ſur le 3me. $A-C$, & ſur le 4me. $A-D$; & par conſéquent ſon avantage total ſera $3A-B-C-D$. D'où il ſuit que l'avantage du

du 2[d]. sera $3B - A - C - D$, celui du 3[me]. sera $3C - A - B - D$, & celui du 4[me]. sera $3D - A - B - C$. Quelques-unes de ces grandeurs seront négatives, & alors elles exprimeront le desavantage du Joueur auquel elles appartiennent.

REMARQUE.

Si l'on fait attention à ce qui a été fait pour trouver tous les termes qui composent le sort du premier Joueur dans l'exemple que l'on s'est proposé, on verra que dans tous les cas possibles que l'on peut proposer sur cette matiere, c'est-à-dire, quel que soit le nombre des Joueurs dont les forces soient p, q, m, r, f, t, &c. & quel que soit le nombre de parties qu'ils doivent jouer, par exemple 20, on verra, dis-je, que le sort du premier Joueur sera composé de tous les termes de la vingtieme puissance de $p+q+m+r+f+$ &c. dans lesquels la lettre p a plus de dimensions, ou autant que quelques-unes, ou que toutes les autres q, m, r, f, t, &c. Le premier de ces termes est p^{20}, & le dernier est $p^4 q^4 m^4 r^4 f^4$, dont le coëfficient doit être fait par ces nombres $\frac{20.\ 19.\ 18.\ 17}{1.\ 2.\ 3.\ 4} \times \frac{16.\ 15.\ 14.\ 13}{1.\ 2.\ 3.\ 4} \times \frac{12.\ 11.\ 10.\ 9}{1.\ 2.\ 3.\ 4} \times \frac{8.\ 7.\ 6.\ 5}{1.\ 2.\ 3.\ 4} \times \frac{4.\ 3.\ 2.\ 1}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$.

Le 1[er]. facteur exprime en combien de manieres on peut prendre 20 choses 4 à 4.
Le 2[d]. les 16 restantes 4 à 4.
Le 3[me]. les 12 restantes 4 à 4.
Le 4[me]. les 8 restantes 4 à 4.
Et le 5[me]. les 4 restantes 4 à 4.

Et leur produit $2845 \times 1820 \times 495 \times 70 \times 1$ exprime le nombre de manieres dont chacun des cinq Joueurs peut gagner quatre parties, & dans ce cas chacun des cinq Joueurs doit retirer $\frac{1}{5}$ de ce qui eſt au Jeu.

Le terme du milieu eſt celui qui exprime le nombre de manieres que le premier Joueur a de gagner 12 parties, les autres cinq Joueurs en gagnant ou 8, ou 7, 6, 5, 4, 3, 2, & 1, de toutes les façons poſſibles.

Il en ſera de même des autres termes dont on ne donne point ici le calcul, que l'on trouvera, ſi l'on veut, en ſuivant les mêmes règles que dans l'exemple réſolu.

COROLLAIRE.

On voit par le Corollaire ſecond & par les ſuivans, que chercher le ſort du premier Joueur entre pluſieurs, dont les forces ſont p, q, m, r, $ſ$, t, &c. leſquels jouent un nombre n de parties ; c'eſt chercher dans le multinome $p + q + m + r + ſ + t +$ &c. élevé à la puiſſance n, tous les termes où p a plus de dimenſions, ou au moins autant qu'aucune des autres lettres q, m, r, &c ; & que cette quantité étant trouvée, on trouve le ſort des autres Joueurs, en ſubſtituant ſucceſſivement pour p les autres lettres q, m, r, $ſ$, &c. Il eſt donc auſſi évident que les quantités trouvées par ces ſubſtitutions, repréſenteront auſſi ſucceſſivement dans le même multinome tous les termes où les lettres q, m, r, $ſ$, &c. auront plus de dimenſions, ou au moins autant que toutes les autres lettres

tres ; & qu'ainsi la même méthode que l'on a suivie, peut servir à élever un multinome quelconque à telle puissance qu'on voudra, & qu'il suffit pour cela de trouver tout ce qui appartient à une des parties dont le multinome est composé.

EXEMPLE.

On demande la sixieme puissance de $a+b+c+d$. Pour la trouver il suffit de chercher tous les termes de cette puissance où la lettre a a plus ou autant de dimensions que chacune des autres lettres b, c d. Ces termes sont

$$a^6 + 6a^5 \times \overline{b+c+d} + \frac{6.\ 5}{1.\ 2} \times a^4 \times \overline{bb+cc+dd}$$

$$+ \frac{6.\ 5}{1.\ 2} \times a^4 \times 2 \times \overline{bc+bd+cd} + \frac{6.\ 5.\ 4}{1.\ 2.\ 3}$$

$$\times a^3 \times \frac{1}{2} \times \overline{b^3+c^3+d^3} + \frac{6.\ 5.\ 4}{1.\ 2.\ 3} \times a^3 \times \frac{3.\ 2}{1.\ 2}$$

$$\times \overline{bbc+bbd+ccb+ccd+ddb+ddc}$$

$$+ \frac{6.\ 5.\ 4}{1.\ 2.\ 3} \times a^3 \times 1.\ 2.\ 3 \times bcd + \frac{6.\ 5}{1.\ 2} \times aa$$

$$\times \frac{4.\ 3}{1.\ 2} \times \overline{bbcc+bbdd+ccdd} \times \frac{1}{3} + \frac{6.\ 5}{1.\ 2} \times aa$$

$$\times \frac{4.\ 3}{1.\ 2} \times 2 \times \overline{bbcd+ccbd+ddbc} \times \frac{1}{2}.$$

Si dans tous ces termes qui expriment les parties de la sixieme puissance, dans lesquelles la lettre a domine, on substitue successivement pour a les grandeurs b, c, d, & réciproquement pour b, c, d, la grandeur a, on aura tous les termes de cette sixieme puissan-

ce où les lettres *b*, *c*, *d*, dominent, & en rassemblant toutes ces parties, on aura la sixieme puissance demandée.

SUR LES MOUVEMENS DE LA TETE, DU COL, ET DU RESTE DE L'EPINE DU DOS.

Par M. WINSLOW. *

ON est à present très convaincu que les petits mouvemens en rond, par lesquels on tourne la Tête réciproquement de côté & d'autre, comme sur un pivot, n'est qu'une espece de rotation de la premiere Vertebre sur la seconde. On est persuadé que l'articulation de l'Os occipital n'y a aucune part, & que dans tous les degrés de ce mouvement, la Tête est simplement soutenue par la premiere Vertebre, qui la porte & transporte avec elle de côté & d'autre. J'examinerai dans un autre tems les difficultés qui pourroient encore arrêter quelques-uns sur ce second point. On avance aussi que les autres Vertebres du Col peuvent contribuer à cette espece de rotation, en ce que chacune d'elles prêtent un peu en même tems, de sorte que par-là elles font toutes ensemble un petit tour gra-

* 26. Mai 1730.

gradué, & ainsi augmentent ce mouvement de rotation.

On sait que les petits mouvemens de Tête en devant & en arriere, que l'on peut faire en tenant le Col immobile, dépendent uniquement de l'articulation de l'Os occipital avec la premiere Vertebre. On est d'accord que les grands mouvemens de Tête en devant & en arriere, par lesquels on peut abaisser, relever & renverser la Tête, sont exécutés par le mouvement commun de plusieurs Vertebres du Col; & que l'articulation de la premiere Vertebre avec la seconde n'y peut rien du tout contribuer, étant uniquement bornée aux petits tours de pivot dont je viens de parler.

A l'égard des inflexions laterales par lesquelles on incline la Tête vers l'une ou l'autre Epaule, il est évident que l'articulation de l'Occiput avec la premiere Vertebre, ni celle de la premiere Vertebre avec la seconde ne les peuvent faire; mais qu'elles dépendent de l'articulation de la seconde Vertebre avec la troisieme, & de celles des autres Vertebres suivantes entre elles.

Outre les quatre inflexions directes dont je viens de parler, & que l'on peut appeller *simples*, il y en a quantité d'obliques, que l'on peut nommer *composées* ou *combinées*; & outre le mouvement de rotation ou pivot que je viens d'exposer, il s'en trouve un autre qui a beaucoup de rapport avec celui que j'ai appellé dans mon Mémoire de l'année passée, *mouvement conique*, ou *mouvement en fronde*;

 car

car on peut, en se tenant debout ou assis, faire un certain tournoyement de Tête par une combinaison successive de plusieurs inflexions du Col, de maniere que par le chemin de ce mouvement, le haut de la Tête décrit un cercle, & le reste avec le Col trace une espece de cone.

Je ne m'arrête pas ici à d'autres mouvemens plus combinés; par exemple, quand on fait le mouvement de charniere avec la Tête sur la premiere Vertebre, dans le même tems que l'on fait le mouvement de pivot avec la premiere Vertebre sur la seconde.

L'artifice de la structure & de la connexion de ces deux premieres Vertebres du Col, par rapport aux mouvemens de la Tête, est à présent presque assez connu. Il s'y rencontre une circonstance que je n'ai pas encore trouvée éclaircie. C'est la méchanique de l'articulation des apophyses inférieures de la premiere Vertebre avec les apophyses supérieures de la seconde. J'ai déja fait là-dessus plusieurs tentatives, mais je n'ai encore rien pu trouver d'assez clair pour être proposé avec contentement à la Compagnie. J'ai dit cela exprès, afin de donner à d'autres l'occasion d'en faire aussi la recherche.

A l'égard des cinq Vertebres suivantes, on se contente de dire que leurs apophyses, communément appellées *obliques*, facilitent tous les differens mouvemens ordinaires du Col. Mais je n'ai pas été content de ce langage, après avoir fait attention que ces mêmes especes de mouvemens se font aussi par les Vertebres des Lombes, quoique la direction

de

de leurs apophyſes obliques ſoit très differente de celle des apophyſes obliques du Col, & qu'elles ne peuvent pas ſe faire toutes par les Vertebres du Dos, quoiqu'il y ait des apophyſes obliques.

Cela m'a porté à examiner de nouveau la conformation & la connexion des Vertebres du Col, & à comparer leurs apophyſes obliques non ſeulement avec les apophyſes obliques des Vertebres des Lombes, mais encore avec les apophyſes obliques des Vertebres du Dos.

On ſait que chacune de la plupart des Vertebres de l'Epine du Dos a quatre apophyſes de cette eſpece. Elles n'ont pas toujours été appellées *obliques*. Véſale, dans ſa grande & excellente Hiſtoire des Os du Corps humain, en parlant de toutes les Vertebres en général, & de leurs differentes apophyſes, donne ſimplement aux deux ſupérieures des quatre dont il s'agit ici, le nom d'*apophyſes aſcendantes*, & celui d'*apophyſes deſcendantes* aux deux inferieures. Il y fait obſerver que dans les Vertebres du Col la direction de ces quatre apophyſes eſt oblique, & que dans les Vertebres du dos elle eſt en quelque maniere (*quadantenus*) droite. Il a même eu ſoin d'exprimer ces deux differences dans la marge de ſon Livre par deux lignes particulieres, l'une oblique & l'autre verticale. Il avertit enſuite, que dans les Vertebres des Lombes le plan de ces apophyſes a auſſi une direction droite ou longitudinale. Il y a ajouté encore, que ces differentes directions ont des degrés

grés dans plusieurs Vertebres de la même classe. Riolan a appellé ces apophyses *articulaires*, & c'est ainsi que je les nommerai après ceci, plutôt qu'*obliques*.

Quant à l'usage de ces differentes directions, il n'en parle que comme en passant. Ainsi à l'occasion des Vertebres du Col, ayant fait observer que l'obliquité de leurs apophyses ascendantes & descendantes est toujours moindre dans les Vertebres qui approchent le plus du Dos: „ C'est, dit-il, parce que ces Vertebres ne devant pas avoir un mouvement „ aussi lâche que celles qui sont au-dessus, „ leur articulation de même ne devoit pas „ être aussi lâche". Ensuite, en parlant des Vertebres du Dos, il dit que leurs apophyses ascendantes & descendantes sont presque en ligne droite selon la longueur du Corps, afin que la connexion de ces Vertebres soit plus ferme, & qu'elle prête moins au mouvement.

Pour mieux exposer ce que je crois avoir remarqué en particulier sur l'usage des differentes directions de ces apophyses, il sera nécessaire de rappeller une idée courte de l'attitude, de l'assemblage & de la connexion de toutes les Vertebres, dont la colomne pliante, qu'on appelle en général l'*Epine du Dos*, est composée.

Il suffira de faire souvenir, 1°. Que dans la plupart des Vertebres, ce qu'on appelle le *corps* est une espece de tronçon dont la portion antérieure est en quelque maniere cylindrique, coupée transversalement par les deux bouts, auxquels on donne le nom de *faces*, dont

dont l'une eſt ſupérieure, & l'autre inférieure. 2°. Que dans les douze Vertebres dorſales, de même que dans les cinq lombaires, ces faces ſont planes, au-lieu que dans les Vertebres du Col la face inférieure eſt en quelque façon convexe, & la ſupérieure proportionnément concave. 3°. Que les corps de toutes les Vertebres tiennent fermement enſemble par une matiere en partie cartilagineuſe, & en partie ligamenteuſe, d'une ſtructure très particuliere, aſſez ferme pour ſoutenir toute la rangée de la colomne vertebrale, & aſſez ſouple pour rendre cette colomne plus ou moins flexible ou pliante en differens ſens. 4°. Que les deux apophyſes inférieures ou deſcendantes de chaque Vertebre s'articulent avec les apophyſes ſupérieures ou aſcendantes de la Vertebre ſuivante, & que pour cet effet chacune de ces apophyſes a une facette encroutée d'un cartilage très poli, proportionnée à la facette cartilagineuſe de l'apophyſe qui s'articule avec elle; de ſorte que ces facettes gliſſent très aiſément les unes ſur les autres en differens ſens, en même tems que les corps ne font que prêter, moyennant l'élaſticité de leur ſymphyſe cartilagineuſe.

Il faut encore faire attention que dans la plupart des Vertebres du Col, les facettes des apophyſes ſupérieures ſont tournées obliquement en haut & en arriere, & que celles des apophyſes inférieures ſont tournées obliquement en bas & en devant. Dans les Vertebres du Dos les facettes des apophyſes ſupé-

périeures regardent presque directement en arriere, & celles des apophyses inférieures presque directement en devant. Ainsi dans le Col ces facettes se trouvent dans autant de plans distingués qu'il y a de Vertebres; au-lieu que dans les Vertebres du Dos les facettes se trouvent pour la plupart à peu près ou comme dans un même plan. Enfin dans les Lombes, les facettes des apophyses supérieures de chaque Vertebre sont tournées les unes vers les autres, de maniere qu'elles se regardent mutuellement, & embrassent les facettes inférieures de la Vertebre voisine, qui sont proportionnément tournées dans un sens opposé.

L'articulation de ces quatre apophyses a en tout tems partagé les Anatomistes. Les uns l'ont regardée comme une espece de ginglyme ou charniere, qu'ils ont appellée *imparfaite*; les autres l'ont nommée *articulation en double genou*. Je crois avoir remarqué le premier là-dessus une circonstance qui est particuliere à l'articulation de ces apophyses, & que je n'ai trouvée dans aucune des autres articulations de tout le Corps humain, soit que ces articulations soient en boule, ou, comme on dit, en genou, soit qu'elles soient en coulisse, soit qu'elles soient en charniere.

On sait que pendant les douze années de mes Exercices publics au Jardin Royal, j'ai plusieurs fois fait sentir sur le Sujet même l'impossibilité de charniere dans cette articulation. Mais n'ayant pas encore assez examiné la particularité dont je viens de parler, je n'ai pas poussé ma démonstration plus loin.

Il

Il eſt vrai que Véſale, dans ſon grand Ouvrage, a ſimplement dit, que cette articulation n'eſt pas ginglyme, comme Galien l'a cru, mais l'a dit ſans en avoir donné aucune preuve; & comme il l'a rapportée à l'arthrodie ordinaire, il fait aſſez voir qu'il n'a pas fait attention à la circonſtance particuliere dont il s'agit à préſent, & dont voici l'expoſé.

Dans toutes les autres articulations du Corps humain, l'un des os articulés eſt toujours pouſſé & appuyé contre l'autre os par la contraction des muſcles, & cela dans tous les degrés de mouvement & dans toutes les attitudes. Outre cela, dans la ſituation verticale des os articulés, les uns peſent plus ou moins ſur les autres, & les preſſent indépendamment de l'impulſion faite par les muſcles contractés. De plus, on convient que quand on meut ou fait jouer l'articulation de deux os, le centre du mouvement ſe trouve toujours près de leur portion ou extrémité la plus voiſine de cette articulation, & que ce centre eſt éloigné de leur portion ou extrémité oppoſée. Par exemple, dans l'articulation de l'Humerus avec l'Omoplate, le centre du mouvement eſt près de la convexité de la tête de l'Humerus & de la concavité de la tête de l'Omoplate; il eſt en même tems éloigné de la poulie de l'Humerus, & de la baſe de l'Omoplate. C'eſt ſur ce fondement qu'on a regardé les os articulés comme des leviers, & leurs articulations comme des points d'appui.

Ce n'eſt pas ainſi dans les articulations de l'Epine du Dos, excepté celle de la premie-

re

re Vertebre avec l'Os occipital, & en partie celle de la même Vertebre avec la seconde. Les articulations des quatre apophyses, dont il est question, sont disposées de façon que dans plusieurs mouvemens du Col, du Dos, & des Lombes, les apophyses d'une Vertebre ne font que glisser très legerement sur les apophyses voisines d'une autre Vertebre, sans s'entrepousser. Il y a même des mouvemens dans lesquels non-seulement ces apophyses ne paroissent pas se toucher, mais elles paroissent encore s'écarter les unes des autres, ou tendre à cet écartemunt.

On comprend très aisément ceci, en faisant attention que le centre du mouvement des Vertebres n'est pas dans leurs apophyses articulaires, ni auprès, mais uniquement dans la symphyse élastique de leurs corps. On le comprendra encore mieux par la structure particuliere de cette symphyse. Elle est principalement composée de plusieurs cerceaux cartilagineux, molasses, minces & larges en maniere de bandes, placés les uns dans les autres, comme autour d'un centre commun, & posés de champ, de sorte que l'un de leur bords s'attache à la face supérieure d'un corps de Vertebres, & l'autre bord s'attache à la face inférieure d'un autre corps. Ces bandes ou cerceaux cartilagineux renferment dans leurs intervalles une matiere très visqueuse, comme une espece de mucilage, & elles sont entourées d'une bande ligamenteuse fort composée, dont les fibres se croisent obliquement, & sont fortement attachées aux bords du corps de chaque Vertebre voisine.

Les

Les bandes cartilagineuses se plient facilement selon leur largeur, dans les differentes inflexions des Vertebres. Ce n'est pas par tout leur contour qu'elles se plient ainsi, ce n'est que par la portion la plus voisine de la cavité de chaque inflexion. Il paroît néanmoins qu'elles peuvent aussi plier également par tout leur contour, sous le poids de la Tête, du Thorax, & des extrémités supérieures, sur-tout quand ces parties sont chargées de quelque fardeau pesant, ou qu'elles sont exposées à quelque résistance considérable. Par-là on pourra encore expliquer comment le corps de l'Homme s'accourcit après avoir été longtems debout ou en marche, & comment il recouvre sa longueur après avoir été ensuite couché pendant un tems proportionné. La bande ligamenteuse empêche le trop d'écartement, & la rupture des bandes cartilagineuses du côté de la convexité de l'inflexion des Vertebres; elle aide aussi à borner les mouvemens de rotation d'une Vertebre sur l'autre.

Quand on examine avec attention, dans un Cadavre, le Col dépouillé de ses muscles, on verra qu'en le courbant en devant, les cartilages du corps des Vertebres deviennent saillans, & paroissent comme autant de bourlets du côté de l'inflexion. Ensuite si on redresse le Col, on verra disparoitre ces bourlets. Enfin, si on contourne de côté & d'autre, comme sur un pivot, les Vertebres qui sont au-dessous de la seconde, on verra que les portions ligamenteuses qui couvrent les cartilages, forment des rides obliques, & plus

ou

ou moins croiſées, ſelon qu'on employe plus ou moins d'effort à ces mouvemens réciproques.

On voit, par tout ce que je viens de dire, que quand on s'incline en devant, alors les Vertebres, en approchant les unes des autres par la portion antérieure de leurs corps, font monter les deux apophyſes inférieures d'une Vertebre plus haut que les apophyſes ſupérieures de la Vertebre ſuivante, & en même tems s'en écarter. Au contraire quand on renverſe l'Epine du Dos, alors les Vertebres s'approchent par la portion poſtérieure de leur corps, & font deſcendre en même tems les apophyſes inférieures d'une Vertebre plus bas que les apophyſes ſupérieures de l'autre Vertebre. Si l'on fait des inflexions laterales, les corps des Vertebres s'approcheront enſemble du côté de l'inflexion, & les apophyſes articulaires du même côté ſe croiſeront, en s'avançant les unes ſur les autres, pendant que les apophyſes articulaires de l'autre côté s'éloigneront les unes des autres.

Ainſi il eſt démontré par le mouvement naturel des Vertebres, que la connexion naturelle de leurs apophyſes articulaires en général, ni eſt, ni peut aucunement être en charniere; car pour cet effet il faudroit que le point d'appui ou le centre du mouvement fût aux apophyſes articulaires, & alors pour mettre les Vertebres en mouvement, il faudroit que d'un côté les corps meurtriſſent leurs cartilages, & que d'un autre côté ces cartilages ſe ſéparaſſent de leurs corps, ce qui ruïneroit entierement la ſymphyſe des Vertebres.

Ou-

Outre cette preuve tirée du mouvement naturel des Vertebres, j'en trouve encore une autre qui me paroît aussi pouvoir passer pour démonstration. Elle est fondée sur la seule conformation des apophyses articulaires: car pour peu qu'on l'examine avec soin, on est convaincu, ce me semble, qu'elle ne peut admettre ni assemblage en charniere, ni mouvement en charniere, même imparfaitement. On sait que le mouvement en charniere est celui qui ne se fait qu'en deux sens opposés, comme autour d'un axe, & que dans le Corps humain, les *ligamens tiennent lieu de cheville*. Par rapport à *l'assemblage*, *il est indifferent* que chacune des deux pieces assemblées ait réciproquement des avances & des enfoncemens, ou que l'une des deux ait seulement des avances & l'autre seulement des cavités; il suffit que leur conformation puisse permettre un assemblage convenable au mouvement en charniere, & permettre ce mouvement, sans déranger l'assemblage. Cela ne se trouve pas dans les apophyses articulaires des Vertebres. Elles sont, ou trop inclinées comme dans les Vertebres du Col, ou trop plattes comme dans celles du Dos, ou trop courbes comme dans celles des Lombes. J'en excepte toujours les deux premieres du Col; & à l'égard de la derniere du Dos, de même des premieres des Lombes, dont les apophyses articulaires ont paru à quelques-uns avoir une conformation assez propre à charniere, j'en rendrai compte dans la suite.

Pour revenir aux directions de ces apophy-

ses

ses & à la difference de ces directions; voici ce que j'ai cru avoir observé là-dessus dans les Vertebres du Col. Elles y sont très obliques, non seulement par rapport au corps de chaque Vertebre, mais aussi par rapport à la rangée entiere de toutes ces Vertebres. Il m'a paru que si la direction de toute la rangée vertebrale du Col étoit semblable à la direction de tout le Corps de l'Homme consideré comme étant étendu, cette obliquité particuliere des apophyses seroit un obstacle à quelques-uns des mouvemens ordinaires du Col, & qu'elle en rendroit d'autres assez difficiles. Car alors on ne pourroit fléchir le Col sur le devant, sans trop écarter les apophyses articulaires d'une Vertebre des apophyses articulaires d'une autre, & sans forcer, ou peut-être rompre les ligamens qui les tiennent ensemble. On ne pourroit alors faire les inflexions laterales du Col, sans causer par-là le même inconvénient aux apophyses articulaires d'un côté, pendant que celles du côté opposé compriment trop, ou froissent les unes & les autres. Enfin dans une telle attitude ou direction droite de la rangée vertebrale du Corps, on ne pourroit pas faire les mouvemens ordinaires en pivot; car alors les apophyses articulaires de tout un côté du Col s'opposeroient les unes aux autres, & par-là empêcheroient le Col de se contourner vers l'autre côté. C'est ce que l'on peut expérimenter sur soi-même, en tenant le Col tout droit, roide & rengorgé, car on sentira que dans cette attitude contrainte, on ne peut pas tant tourner le Col, ni

ni par conféquent la Tête comme dans l'attitude ordinaire.

Après avoir fait plufieurs recherches pour trouver le dénouement de cette difficulté, je crois l'avoir rencontré dans la feule direction de toute la rangée vertebrale du Col. Cette direction eft naturellement très oblique dans l'Homme vivant. Car quand on fe tient droit, debout ou affis, on trouvera l'extrémité fuperieure de cette rangée vertebrale beaucoup plus avancée fur le devant de la Poitrine, que l'on ne fe l'imagineroit par l'infpection d'un Squélete fufpendu ou redreffé *fur un piédeftal*. Mais pour m'affurer exactement du degré de cette obliquité dans l'Homme vivant, où on ne peut voir ni toucher la premiere ou la feconde Vertebre, j'ai cherché parmi les parties voifines expofées à la vue & au toucher, ce qui pourroit en donner la marque certaine, & je l'ai trouvé dans les deux apophyfes maftoïdes de la Tête, qui fe font affez fentir, même dans les Sujets les plus gras. En examinant ces apophyfes dans un Crâne, fi on tire une ligne droite du bord antérieur de l'une jufqu'au bord antérieur de l'autre, on verra que la partie moyenne de l'un & de l'autre Condyle occipital fe trouve dans la même ligne, & par conféquent que les cavités fupérieures de la premiere Vertebre, qui font articulées avec ces Condyles, fe trouvent auffi dans cette même ligne. Ainfi en fe tenant droit, debout ou affis, on n'a qu'à appliquer derriere le bas de l'oreille, où on fent le bord antérieur de l'apophyfe maftoïde, le

bout d'un fil dont l'autre bout ſoit chargé d'un plomb, ou y poſer verticalement un petit bâton droit, & par-là on peut juger ſurement de l'obliquité naturelle de la rangée vertebrale du Col.

En examinant l'attitude particuliere de chaque Vertebre ſelon cette obliquité générale de toute leur rangée, il m'a paru, que dans pluſieurs Vertebres les facettes de leurs apophyſes articulaires ſont ſituées preſque horizontalement ou tranſverſalement par rapport à la longueur du Corps de l'Homme, ſe tenant droit, debout ou aſſis, & que ces facettes ſont placées les unes ſur les autres dans des plans differens preſque paralleles, à peu près comme les marches d'un eſcalier. Il m'a paru que cette attitude directe des apophyſes obliques procurée par l'attitude oblique de la rangée vertebrale, facilite les mouvemens de rotation du Col, en ce qu'elles ne font que gliſſer plus ou moins tranſverſalement les unes ſur les autres, ſans s'entreheurter. Il m'a encore paru que par cette attitude les apophyſes articulaires ſe pourroient ſoutenir les unes les autres dans certains cas, comme quand on porte des fardeaux ſur la Tête, & qu'elles pourroient ainſi en décharger un peu les corps des Vertebres.

J'ai obſervé que dans quelques Sujets la rangée des trois premieres Vertebres eſt comme redreſſée, & par-là donne au Col oſſeux une certaine courbure, qui eſt aſſez connue, mais qui n'a pas été aſſez déterminée par rapport aux Vertebres qui la forment particu-

culierement. La feconde & la troifieme Vertebre du Col ainfi redreffées, leurs apophyfes articulaires fe rapprochent plus de la verticale, & peuvent par-là, ce me femble, faciliter les inflexions laterales du Col, quand on panche la Tête vers l'une ou l'autre épaule. Il femble même que plus on tient la Tête droite ou tant foit peu levée en arriere, fans néanmoins rengorger le Col, plus ces inflexions font aifées. Il ne s'agit point du tout ici de l'articulation de la premiere Vertebre avec l'Os occipital. A l'égard des deux dernieres Vertebres du Col, la direction de leurs apophyfes articulaires dégénere, pour ainfi dire, peu à peu en celle des apophyfes articulaires des Vertebres dorfales. Véfale a très clairement fait cette derniere remarque.

On a déja obfervé que le peu de volume du corps des Vertebres du Col, joint à l'épaiffeur & à la foupleffe de leurs cartilages, donnent en général au Col la grande mobilité qu'il a au deffus des autres portions de toute la colomne vertebrale. La conformation particuliere de ces corps, en ce qu'ils font échancrés en haut & faillans en bas, a été regardée comme une efpece d'emboîtement propre à empêcher la luxation de ces Vertebres. Une telle idée fatisferoit toujours ceux qui fe bornent à l'infpection du Squélete, dont les Vertebres font dépouillées de leur fymphyfe. Mais un feul coup d'œil jetté fur l'état naturel, dans lequel les corps de ces Vertebres font éloignés les uns des autres par leur fymphyfe cartilagineufe, en fait voir évidemment la fauffeté, parce qu'on n'y

Z 2 trou-

trouve pas un emboîtement osseux. Il me paroît plutôt que ces échancrures & ces saillies augmentent l'étendue de la connexion & de l'adhérence des cartilages avec les corps, & que sans cette augmentation de surface ils auroient été trop sujets à rupture ou à séparation par des efforts & des mouvemens extraordinaires.

MANIERE
DE FAIRE LE SUBLIMÉ CORROSIF EN SIMPLIFIANT L'OPERATION.

Par M. BOULDUC *.

LA préparation du Vif-argent, qu'on appelle souvent tout court, & comme par excellence, du *Sublimé*, & quelquefois par distinction, du *Sublimé corrosif*, par rapport aux effets rongeans qu'il produit sur le corps, est devenue une drogue nécessaire dans la Matiere Médicinale, autant par rapport à elle-même, quand on l'employe seule ou dans quelques mélanges pour l'usage extérieur, que par rapport à quelques remedes que l'on en prépare ensuite, comme sont le Mercure doux, la Panacée mercurielle & autres, dont on se sert tous les jours intérieurement: & les Mémoires de l'Académie ont déja proposé

* 6 Sept. 1730.

ſé plus de manieres differentes de la faire, qu'aucun Livre de Chymie Latin ou François qui me ſoit connu.

Cependant on a lieu de s'étonner, que parmi le grand nombre des Artiſtes qui ſont dans cette Ville & dans le reſte du Royaume, il y en ait très peu, & peut-être pas cinq ou ſix, qui veuillent ſe livrer à préparer cette drogue eux-mêmes; les uns la prennent des Droguiſtes, les autres des Colporteurs, & ces deux-ci s'en rapportent à la bonne-foi des étrangers, dont ils la tirent. De quelque part pourtant qu'elle vienne, on fait, à mon avis, également mal de s'y fier, puiſqu'il n'eſt que trop certain, qu'il ſe trouve des mains avides d'un gain criminel, qui la falſifient par le mêlange de l'Arſenic, dont malheureuſement nous n'avons point encore d'épreuve, qui pût d'avance nous faire diſtinguer ſa préſence; on n'en devient certain que par les funeſtes effets, & c'eſt trop tard.

Pour éviter la tromperie, & des événemens fâcheux, il ſeroit à ſouhaiter, que tous ceux que leur profeſſion engage à débiter des remedes au Public, n'en donnaſſent aucun de ceux qu'on tire du Sublimé ou par le Sublimé, à moins de les avoir faits de leurs propres mains. La ſureté des malades eſt inſéparable de la bonté des remedes bien conduits.

Malgré la certitude de cette conſéquence, la répugnance pour l'opération dont il s'agit, eſt grande & preſque invincible chez la plupart des Artiſtes, & peut rouler ſur diffe-

rentes raisons: les uns aiment mieux acheter bon marché ce qui leur couteroit davantage à faire chez eux; d'autres craignent les vapeurs des Eaux fortes, qu'on respire avant & pendant l'opération; & d'autres ont été revoltés par les inconvéniens & les incommodités auxquelles la méthode la plus reçue est encore sujette dans la sublimation. Cette méthode est, comme tout le monde le sait, de mêler du Mercure, dissous par l'Eau forte & réduit en crystaux ou évaporé à siccité, avec du Vitriol calciné & du Sel commun décrépité; de pousser ensuite ce mêlange dans un Matras par un feu convenable.

Ayant fait cette opération tous les ans depuis ma jeunesse, j'y ai aussi trouvé quelquefois à redire: l'Eau-forte, en dissolvant d'abord le Mercure, & en s'exhalant encore après du col du Matras, quand il est sur le feu, jette des vapeurs desagréables & nuisibles, qui se répandent par-tout, quelque grand que soit le Laboratoire; elles ont chassé plus d'une fois les auditeurs de l'Amphithéatre du Jardin du Roi; outre cela, il arrive souvent que nos Matras de verre crevent ou au commencement ou vers la fin de l'opération, surtout, quand on veut faire plusieurs livres de Sublimé à la fois; & par cet accident non seulement il se perd de la matiere, mais aussi l'Artiste court risque d'être maltraité par les vapeurs qu'elle exhale; & enfin les trois Sels qu'on employe, faisant un gros volume, ne permettent gueres au feu de les bien pénétrer, ainsi il est rare, que la masse qui reste au fond, comme un *caput mortuum*, soit entie-

tiérement épuisée de Mercure, & c'est apparemment ce qui a fait qu'on a pris la coutume de la jetter, comme inutile.

Ces inconvéniens m'ont souvent fait souhaiter de trouver une méthode plus commode & plus succincte pour ce travail, & y étant parvenu, je l'ai pratiquée depuis quelques années en mon particulier & en Public: quand on voudra la comparer avec celle qui est la plus en usage, on s'appercevra aisément de la difference qu'il y a de l'une à l'autre, & pour les vaisseaux & pour l'Artiste. Enfin, croyant de mon côté l'avoir assez examinée, je ne hésite plus de la communiquer avec quelques circonstances que l'on y peut remarquer, afin que ceux qui voudront l'imiter, partagent avec moi la facilité & les avantages que j'y ai trouvés, & abandonnent dans la suite la répugnance de faire le Sublimé eux-mêmes, en considération des raisons alléguées au commencement.

Je verse sur autant de livres de *Vif-argent*, que je veux employer à la fois, pareil nombre de livres de bonne & forte *Huile de Vitriol*, dont je retire par la Cornue le phlegme & la portion d'acide, qui ne peut pas rester uni avec le Mercure: l'Huile de Vitriol à l'aide du feu dissout le Mercure, & tous les deux font à la fin une *masse très blanche*, que je pousse jusqu'au sec: je mêle promptement cette masse retirée de la Cornue avec parties égales de *Sel commun*, le plus blanc que je puisse avoir, non pas décrépité, mais simplement seché dans quelque endroit chaud, & je pousse ensuite ce mêlange au feu, à la ma-

maniere ordinaire, dans un Matras bien enterré dans le ſable. Dans le commencement il monte un peu d'humidité en gouttes d'eau dans le col du Matras, après quoi le bouchon de papier prend une barbe de filets ou cryſtaux blancs ; alors j'augmente le feu, & j'ôte autour de la voûte du Matras le ſable peu-à-peu & à meſure que je vois que le Sublimé s'y attache & s'augmente: quand je m'apperçois qu'il ne ſe ſublime plus rien, j'ôte tout le ſable d'alentour, & retire le vaiſſeau encore brulant, afin qu'il crevaſſe par la fraicheur de l'air; & dans un tems chaud je facilite ces crevaſſes par un linge mouillé, dont je l'envelope, pour n'avoir pas beſoin de le caſſer à force de coups, qui feroient retomber du Sublimé ſur la matiere qui reſte au fond.

Dès cette premiere opération j'ai un Sublimé bien blanc & cryſtallin par-tout, qui aux parois du vaiſſeau eſt épais & compact, & au dedans parſemé de cryſtaux formés en lames ou aiguilles applaties; & la maſſe du fond eſt une poudre friable, qu'on détache facilement du verre. Si le Sel, que j'ai employé, a été net, cette poudre eſt griſâtre, & s'il a été un peu ſale, elle tire ſur le roux.

Dans ce procedé il n'y a point d'*Eau-forte*, & le Sublimé ne ſe fait pas moins bien; de plus, on évite le *Fer*, qui dans le Vitriol calciné, quand on l'employe, fait la moitié de ſon poids, & embaraſſe les matieres, qui doivent agir les unes ſur les autres, de ſorte que l'operation ne ſe peut faire que lentement; au lieu que les deux matieres dont

je

je me sers, se touchent immédiatement, & qu'étant plus aisément pénétrées par le feu, elles agissent sans obstacle & avec plus de facilité les unes sur les autres; aussi l'opération est-elle achevée en une fois moins de tems, que suivant le procedé ordinaire.

L'*Huile de Vitriol*, qu'il faut employer, n'est pas toujours également forte: si elle est bonne, elle dissout son poids de Mercure; ainsi, si elle est foible, on en mettra davantage, ou, ce qui vaut mieux, on la déphlegmera auparavant.

Quelque forte ou déphlegmée que soit cette Huile, elle est sans odeur; aussi la liqueur, qu'on retire dans le tems qu'elle dissout le Mercure, a-t-elle toujours passé pour un phlegme ou un esprit foible: & en effet elle est très foible au goût, legerement aigrelette & âpre; mais en récompense elle est d'une odeur de Soufre allumé si vive, que je n'en ai pas senti de pareille; c'est un *Esprit de Vitriol des plus volatils*: & quoiqu'il paroisse presque impossible, que les Auteurs qui ont proposé la dissolution du Mercure par cette distillation, pour en faire du Turbith minéral, n'ayent apperçu cette *odeur*, il n'y en a pourtant pas un, que je sache, qui en fasse mention, quoiqu'à mon avis, cette production soit la plus forte preuve que le Mercure est chargé de matiere inflammable, qui est en état de changer l'acide vitriolique, fixe & sans odeur, en un esprit des plus vifs & volatils.

Si on ne veut pas employer cette liqueur dans des Remedes où les Auteurs deman-

dent ces sortes d'esprits, par la crainte qu'elle ne soit chargée de Mercure, on peut la garder pour pareille opération. Il est vrai qu'au bout de quelque tems, elle perd entierement sa volatilité & vivacité, & rentre dans un état de fixité; mais dans quelque état qu'on la prenne, elle peut encore dissoudre, à l'aide du feu, la moitié de son poids de Mercure.

Pour ce qui est de la *masse blanche*, qu'on retire de la Cornue, il est bon de l'employer d'abord, ou du moins de la conserver bien seche par rapport à l'acide vitriolique, qui s'y trouve des plus concentrés, car pour peu qu'elle reste à l'air, cet acide en attire l'humidité, la masse devient molle, & même avec le tems, toute fluide, ce qui rend son mêlange avec le Sel commun difficile à manier, outre qu'elle en fait promptement élever des vapeurs incommodes d'Esprit de Sel, qui peut-être entraînent déja avec elles des parcelles de Mercure.

Pour peu qu'on fasse réflexion sur ce qui a formé cette *masse blanche*, on s'étonnera du sentiment erronné de *Van Helmont*, qui soutient dans plusieurs endroits de ses Ouvrages, qu'une livre de Mercure peut changer un grand nombre de livres d'Esprit ou d'Huile de Vitriol (plusieurs milliers, dit-il) en vrai *Alun*, & bien aisément, *solo contactu*; il faut seulement que le Mercure les touche pour en faire de l'Alun. Mais outre que le Mercure resteroit à jamais dans l'Huile de Vitriol sans un effet réciproque, si la chaleur du feu n'aidoit cet acide à le pénétrer, & à réduire les

les deux en une consistance saline; nous avons des moyens aisés de dissoudre de nouveau leur union, & d'en revivifier le Mercure, soit par le Sel de Tartre, par la limaille de Fer, ou par le régule d'Antimoine, &c. & l'opération que je propose, est encore une preuve convaincante de leur combinaison: On voit là, que l'acide vitriolique, qui étoit concentré dans la masse blanche, abandonnant le Mercure, saisit l'alkali du Sel commun, & en dégage l'Esprit, lequel trouvant le Mercure abandonné, bien divisé, & comme préparé exprès pour lui, le saisit à son tour; les deux premiers s'arrêtent au fond, & les deux autres s'élevent, bien unis, en Sublimé corrosif, qu'on ne fera jamais avec de l'Alun & du Sel; & il y a de l'apparence que la seule blancheur de notre Vitriol mercuriel a ébloui le Philosophe au point qu'il l'a pris pour de l'Alun.

A l'égard du *Sel commun*, qui est indispensablement nécessaire pour notre opération, je ne le fais point décrépiter, mais seulement bien secher. La décrépitation lui fait perdre de son acide, & met par-là une portion de sa terre alkaline à nud, qui absorbe alors de l'acide vitriolique, uni au Mercure, dont une portion devient ainsi libre & se revivifie.

Si le Sel commun n'est pas bien sec, on peut mettre une once à deux de plus pour chaque livre qu'on en employe.

Enfin le *Résidu*, qu'on trouve après la sublimation comme une poudre friable au fond, contient un Sel, qui ne mérite pas d'être jetté: on peut dissoudre cette poudre, & filtrer

l'eau; il reste peu de terre en arriere; & la dissolution exposée à se crystalliser fournit un aussi bon Sel & en aussi beaux crystaux, que si on l'avoit fait immédiatement & exprès par l'Huile de Vitriol & le Sel commun.

Il est pourtant de la prudence de l'Artiste de bien pourvoir à la pureté de ce Résidu, c'est, *qu'il soit bien épuisé de Mercure*. Pour s'en assurer, on peut voir si l'Huile de Tartre par défaillance précipite quelque chose de jaune de sa dissolution; ou si une lame de cuivre, trempée dedans, en blanchit; ou, pour accourcir, si un peu de ce Résidu sec, frotté sur un morceau de cuivre poli & mouillé, lui imprime de la blancheur. En ce cas, on ne sauroit mieux faire que de calciner le tout un peu vivement sous une cheminée, ou plutôt dans une place ouverte, pour en dissiper ce qui y peut rester de Mercure; après quoi on n'a rien à craindre pour le Sel qu'on en retire.

EXA-

EXAMEN DES LIGNES DU QUATRIEME ORDRE.

SECONDE PARTIE DE LA SECTION I.

Dans laquelle on traite en général des Lignes du 4me ordre qui ont des points doubles.

Par M. L'Abbé DE BRAGELONGNE.

ON a vu dans la premiere Partie de cette Section, que les Lignes Algébriques sont susceptibles de differentes especes de points simples & de differentes especes de points multiples, selon qu'elles sont d'un ordre plus ou moins élevé. J'ai tâché d'y déveloper une Méthode générale, pour discerner si un point donné sur une Ligne algébrique quelconque est simple ou multiple, & de quelle espece de multiplicité il est. Il s'agit maintenant de faire l'application de cette Méthode aux Lignes du 4me ordre, dont les unes peuvent avoir des points doubles de toutes les especes, comme on l'a démontré dans les Art. 37 & 56, les autres un point triple formé par l'interfection commune de trois branches de la même Courbe, ou par le rebrouffement de deux branches par lequel il en paffe une troifieme, ou enfin par l'adhéfion d'une Ovale infiniment petite fur

une des branches de la Courbe ; cas singulier, dont j'ai fait voir la possibilité dans les Art. 59 & 60 du Mémoire précédent. Nous ne parlerons dans celui-ci que des points doubles, & nous renverrons à une troisieme Partie tout ce qui concerne les points triples des Lignes du 4me ordre, le champ étant trop vaste pour pouvoir être parcouru avec quelque exactitude dans un seul Mémoire.

Il faut se souvenir qu'on a donné dans l'Art. 31 du premier Mémoire une Equation générale pour toutes les Lignes du 4me ordre, soit qu'elles s'étendent à l'infini, soit qu'elles rentrent en elles-mêmes ; celles que l'on va donner ici, la premiere pour les Lignes du 4me ordre, qui ont un point double à l'origine de leur axe, la seconde pour celles qui ont deux points doubles sur leur axe, & la troisieme pour celles qui ont trois points doubles, conviennent aussi aux Lignes de cet ordre, qui s'étendent à l'infini, & à celles qui rentrent en elles-mêmes, & l'on en fait l'application aux unes & aux autres par des exemples choisis parmi le grand nombre de Lignes dont le 4me ordre est composé.

Enfin les Lignes du 4me ordre étant susceptibles des trois especes de points doubles d'intersection, comme on l'a démontré dans l'Art. 37, après avoir donné des règles pour reconnoitre le point d'intersection d'avec le point de rebroussement & le point conjugué, il a fallu en donner pour reconnoitre parmi les points d'intersection des Lignes du 4me ordre, ceux qui étoient de la 1re, 2de ou 3me espece ; c'est ce qu'on a exécuté à la fin de

de cette seconde Partie, que l'on termine enfin par démontrer qu'une Courbe du 4me ordre ne sauroit jamais avoir plus de trois points doubles.

J'aurois pu commencer mon Mémoire par cette derniere Proposition, & donner en même tems plusieurs nouveaux Théoremes sur les Lignes algébriques des ordres supérieurs au quatrieme: Théoremes qui font voir une analogie parfaite entre les Lignes algébriques & les points multiples dont elles sont susceptibles; par exemple, on auroit pu démontrer ici, 1°. Qu'une Ligne du 6me ordre ne sauroit jamais avoir plus de trois points triples; Qu'une Ligne du 8me ordre ne sauroit avoir plus de trois points quadruples; Qu'une Ligne du 10me ordre ne sauroit avoir plus de trois poins quintuples; Enfin qu'une Ligne d'un ordre pair, exprimé par n, ne sauroit avoir plus de trois points multiples, dont la multiplicité soit exprimée par $\frac{n}{2}$.

2°. On auroit pu démontrer ici, à l'égard des Lignes d'un ordre impair, que celles du 3me ordre, qui ont un point double, ne sauroient avoir d'autres points multiples. Que celles du 5me ordre, qui ont un point triple, ne peuvent avoir plus de trois points doubles. Que celles du 7me ordre, qui ont un point quadruple, ne peuvent avoir plus de trois points triples. Que celles du 9me ordre, qui ont un point quintuple, ne sauroient avoir plus de trois points quadruples; & ainsi des autres Lignes d'un ordre impair à l'infini. Mais la démonstration de ces Théoremes m'au-

m'auroit trop écarté de mon sujet, je me reserve de la donner dans quelque Ecrit détaché: continuons donc l'examen des Lignes du 4me ordre, sans pousser plus loin la Théorie générale des Lignes algébriques d'un ordre supérieur. C'est ce que l'on trouvera dans ce second Mémoire, dont les Articles doivent suivre le même ordre que ceux du Mémoire précédent, puisqu'il n'en est que la suite.

PROPOSITION III.

THEOREME.

LXI. *Toutes les Lignes du 4me ordre, telles que* MGDGmZEV* *ou* MGmZEV †, *ou* MDmZEV ‡, *dont la nature est exprimée par l'Equation générale marquée ici par* (10), *dans laquelle l'indéterminée* (z) *exprime les abscisses* GQ, *&* *les indéterminées* (u), *les ordonnées* QM, *ont un point double à l'origine* G *de leur axe.*

$$(10) \ldots \Delta u^4 + \overline{Qz + A} \times u^3 + \overline{Bzz + Cz + D} \times uu + \overline{Ez^3 + Fzz + Gz} \times u + Kz^4 + Lz^3 + Mzz = 0.$$

DEMONSTRATION.

Lorsque le point *Q* tombe en *G*, alors *z* étant $= 0$, l'égalité marquée par (*L*) dans l'Art. 49, est telle qu'on la voit ici.

$$(L) \ldots \Delta u^4 + A u^3 + D u^2 = 0.$$

Cette

* Fig 41. † Fig. 42. ‡ Fi. 43.

Cette égalité ayant deux racines égales & de même signe, qui sont $u=0$ & $u=0$, il est visible qu'il y a au point G deux ordonnées égales & de mêmes signes. Mais quand l'ordonnée QM (u) est $=0$, l'égalité marquée par (A) dans l'Art. 49, qui donne les valeurs des abscisses GQ (z), lorsque les ordonnées QM(u) sont $=0$, est telle qu'on la voit ici.

$$(A) \ldots Kz^4 + Lz^3 + Mzz = 0.$$

Cette seconde égalité ayant encore deux racines égales & de mêmes signes, savoir $z=0$ & $z=0$, il est visible qu'il y a au point G, non seulement deux ordonnées égales & de mêmes signes, comme on vient de le voir, mais encore deux abscisses égales & de mêmes signes, qui sont $z=0$ & $z=0$; donc * il doit y avoir en G un point double de la courbe $MGDGmZEV$, ou $MGmZEV$, ou $MDmZEV$, dont la nature est exprimée par l'Equation marquée par (10).

Mais les coëfficiens Δ, Q, A, B, C, D, E, F, G, K, L, M, de l'Equation (10) étant des coëfficiens indéterminés, quoique constans, qui portent avec eux leurs signes $+$ & $-$, il est évident que l'Equation marquée par (10) exprime la nature de plusieurs lignes du 4me ordre; & comme les differentes valeurs de ces coëfficiens ne changent rien à la présente démonstration, il est visible que cette démonstration convient à toutes les Courbes, dont la nature peut être exprimée par l'équation (10), & par conséquent que toutes ces courbes ont un point double à l'origine G de leur axe. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Co-

* *Art.* 51.

COROLLAIRE.

LXII. Donc toutes les lignes du 4me ordre, dont la nature eſt exprimée par l'Equation marquée ici par (20) ont un point double à l'origine *G* de leur axe.

$$(20) \ldots \Delta u^4 + \overline{Qz + Ax} u^3 + \overline{Bzz + Cz +} \overline{D} x u^2 + Ez^3 + \frac{E\sqrt{M}}{\sqrt{K}} zz + \frac{G\sqrt{K}}{\sqrt{M}} zz + Gz \times u + Kz^4 + 2\sqrt{MK}\, z^3 + Mzz = 0.$$

Car l'abſciſſe (z) étant $=0$, on aura toujours l'égalité $\Delta u^4 + Au^3 + Du^2 = 0$, & l'indéterminée (u) étant $=0$, on aura toujours l'égalité $Kz^4 + 2z^3\sqrt{KM} + Mz^2 = 0$; d'où il ſuit qu'au point *G*, ou $z=0$, on aura, comme dans l'Article précédent, deux valeurs de l'indéterminée (u) réelles, & l'une & l'autre $=0$, & deux valeurs de l'indéterminée (z) réelles, & l'une & l'autre $=0$; ainſi le point *G* ſera, comme dans l'Article précédent, un point double auquel l'axe *GQ* & l'ordonnée principale *GL* ſeront ſécantes. Donc, &c.

PROPOSITION IV.

PROBLEME.

LXIII. *Toutes choſes demeurant les mêmes comme dans la Propoſition précédente, déterminer ſi le point double* G *de la courbe* MGDmZEV *dont la nature eſt exprimée par l'Equation* (10), *dé-*

déterminer si ce point double G *est fait par l'intersection de deux branches de la courbe* [a], *ou s'il est un point de rebroussement* [b], *ou enfin s'il est un point double invisible sur le plan, c'est-à-dire, une ovale infiniment petite conjuguée* [c].

SOLUTION.

On cherchera d'abord quel est le rapport du (du) au (dz) dans tous les points doubles de la courbe $MGDGmZEV$, en differentiant deux fois [d] son Equation marquée par (10) (dans l'exposé de la Proposition précédente); cette double differentiation donnera l'équation irrationnelle que l'on voit ici marquée par Σ.

$$\Sigma \ldots \left\{ \begin{array}{l} +6\Delta u^2 \\ +3Qzu \\ +3Au \\ +Bzz \\ +Cz \\ +D \end{array} \right\} du^2 \left\{ \begin{array}{l} +3Qu^2 \\ +4Bzu \\ +2Cu \\ +3Ez^2 \\ +2Fz \\ +G \end{array} \right\} dzdu \left\{ \begin{array}{l} +Bu^2 \\ +3Euz \\ +Fu \\ +6Kz^2 \\ +3Lz \\ +M \end{array} \right\} dz^2 = 0.$$

On rendra cette Equation differentielle propre au point double G, en y substituant, au lieu des indéterminées (z) & (u), leurs valeurs en ce point double G, qui sont [e] $z=0$ & $u=0$; ainsi l'Equation Σ deviendra $Ddu^2 + Gdzdu + Mdz^2 = 0$, d'où l'on tirera par le calcul ordinaire $\frac{du}{dz} = -\frac{G}{2D} \pm \frac{1}{2D} \sqrt{GG - 4DM}$.

Cela posé, je dis que ces deux valeurs *du*

a Fig. 41. b Fig. 42. c Fig. 43.
d *Art.* 46. e *Art.* 61.

$\frac{du}{dz} = -\frac{G}{2D} + \frac{1}{2D}\sqrt{GG-4DM}$, & $-\frac{du}{dz} = \frac{G}{2D} + \frac{1}{2D}\sqrt{GG-4DM}$, feront connoitre si le point double G est un point d'interfection de deux branches de la courbe $MGDGmZEV$*, ou s'il est un point de rebroussement de la courbe $MGmZEV$†, ou bien s'il est un point double invisible de la courbe $MDmZEV$‡. Car si l'on prend sur l'axe GQ le point π, tel que $G\pi = 2D$, & sur l'ordonnée principale GL le point λ, tel que $G\lambda = G$: si sur cette même ordonnée principale GL, de part & d'autre du point λ, on prend les parties $\lambda\theta$ & $\lambda\Phi$ égales l'une & l'autre à $\sqrt{GG-4DM}$: si l'on joint les points π & θ, & π & Φ, par les droites $\pi\theta$, $\pi\Phi$; & enfin si par le point double G, on tire les droites GT, Gt, paralleles à $\pi\theta$, $\pi\Phi$, il est évident, par la doctrine des tangentes, que ces droites GT, Gt, seront les tangentes de la courbe au point double G. Or il est visible qu'il peut arriver trois differens cas: car 1°. si les deux valeurs $-\frac{G}{2D} + \frac{1}{2D}\sqrt{GG-4DM}$ & $\frac{G}{2D} + \frac{1}{2D}\sqrt{GG-4DM}$, sont des grandeurs réelles & inégales, ou bien réelles & égales, mais de differens signes, il est clair que les deux tangentes GT, Gt, seront réelles & distinctes l'une de l'autre. 2°. Si les deux valeurs $-\frac{G}{2D} + \frac{1}{2D}$ $\sqrt{}$

* Fig. 41. † Fig. 42. ‡ Fig. 43.

$\sqrt{GG-4DM}$ & $\frac{G}{2D}+\frac{1}{2D}\sqrt{GG-4DM}$, ſont réelles, égales & de mêmes ſignes, les deux droites $G\theta$, $G\Phi$, ſe confondront, & par conſéquent les deux tangentes GT, Gt, tomberont l'une ſur l'autre, & ne ſeront plus qu'une même tangente. 3°. Si les deux valeurs $-\frac{G}{2D}+\frac{1}{2D}\sqrt{GG-4DM}$ & $\frac{G}{2D}+\frac{1}{2D}\sqrt{GG-4DM}$ ſont imaginaires, les deux droites $G\theta$, $G\Phi$, ſeront imaginaires, & par conſéquent les deux tangentes GT, Gt. Mais dans le premier cas, y ayant deux tangentes * qui ſe coupent au point G, il doit y avoir deux branches de la courbe qui paſſent en G; donc le point double G ſera un point d'interſection, lorſque les deux valeurs $-\frac{G}{2D}+\frac{1}{2D}\sqrt{GG-4DM}$ & $\frac{G}{2D}+\frac{1}{2D}\sqrt{GG-4DM}$ ſont des grandeurs réelles & inégales, ou des grandeurs réelles & égales, mais de differens ſignes. Dans le ſecond cas, les deux tangentes ſe confondant en une, le point double G ſera un point de rebrouſſement †, ou une Oſculation, ou bien une Lemniſcate infiniment petite conjugée. Enfin dans le troiſieme cas, les deux tangentes GT, Gt, étant imaginaires, le point double G, quoique réel, & faiſant partie de la courbe, n'aura point de

* *Art.* 52.

† *Art. id. Voyez ce qui eſt dit enſuite ſur les Oſculations & les Lemniſcates infinim. petites.*

de tangente, & sera par conséquent un point double invisible sur le plan *, c'est-à-dire, une ovale infiniment petite conjuguée. Donc par le moyen de l'Equation $\frac{du}{dz} = -\frac{G}{2D} \pm \frac{1}{2D}\sqrt{GG-4DM}$, on déterminera la nature du point double *G*, dont on connoit l'existence & la position par la Proposition précédente. *Ce qu'il falloit trouver*.

COROLLAIRE.

LXIV. Donc 1°. lorsque dans l'Equation (10) † les coëfficiens *D* & *M* sont affectés de signes contraires, le point double *G* est un point d'intersection de deux branches finies ou infinies de la courbe *MGDGmZEV*; car il est visible que l'expression $\pm\sqrt{GG-4DM}$ marque alors des grandeurs réelles & de differens signes. 2°. Lorsque dans la même Equation marquée par (10) ‡ les coëfficiens *D* & *M* sont affectés du même signe, si $GG > 4DM$, le point double *G* est encore un point d'intersection: mais si $GG = 4DM$, ce point double *G* est un point de rebroussement, ou une Osculation, ou bien une Lemniscate infiniment petite conjuguée: & si $GG < 4DM$, le point double *G* est un point conjugué, c'est-à-dire, un point double invisible sur le plan; car dans le premier cas les expressions $\pm\sqrt{GG-4DM}$ marquent des grandeurs réelles & de differens signes: dans le second cas, ces expessions sont

* *Art.* 52. & 59. † *Art.* 61. ‡ *Art. id.*

ſont égales à zero, & par conſéquent l'on a $\frac{du}{dz} = -\frac{G}{2D} \pm 0$: dans le troiſieme cas, les expreſſions $\pm\sqrt{GG-4DM}$ ſont l'une & l'autre imaginaires.

EXEMPLE I.

LXV. Soit un triangle * quelconque $G\Pi\Lambda$, dont les trois côtés $G\Pi$ (b), $G\Lambda$ (c) & $\Pi\Lambda$ (a), ſont donnés; ſi l'on prolonge indéfiniment de part & d'autre du point G les deux côtés $G\Pi$, $G\Lambda$, de ce triangle, & que l'on prenne la droite $G\Pi$ pour l'axe, & la droite $G\Lambda$ pour l'ordonnée principale d'une courbe $MGDGmZEV$, dans laquelle le rapport des ordonnées QM (u) aux abſciſſes GQ (z) ſoit exprimé par l'Equation $b^4u^2 + 2cb^3zu - \frac{1}{4}a^2z^4 - \frac{1}{3}afbz^3 - \frac{1}{3}agbz^3 - \frac{1}{2}gfb^2zz + c^2b^2z^2 = 0$, dans laquelle on ſuppoſe $f > 2g$; il eſt viſible, par la troiſieme Propoſition †, que cette courbe a un point double à l'origine G de ſon axe GQ & de ſon ordonnée principale GL; car quand GQ $(z) = 0$, on a QM $(uu) = 0$: de plus QM (u) étant $= 0$, il vient $\frac{1}{4}a^2z^4 + \frac{1}{3}afbz^3 + \frac{1}{3}agbz^3 + \frac{1}{2}gfb^2z^2 - c^2b^2z^2 = 0$, d'où l'on tire $zz = 0$, & $\frac{1}{4}a^2zz + \frac{1}{3}afbz + \frac{1}{3}agbz + \frac{1}{2}gfbb - ccbb = 0$: or les deux premieres égalités font connoitre ‡ que les droites GQ, GL, ſont l'une & l'autre ſécantes de la courbe $MGDGmZEV$ en un point dou-

* *Fig.* 41. † *Art.* 61. ‡ *Art.* 61.

double G. Mais, par la quatrieme Proposition * & le Corollaire qui la suit, il est clair que ce point double G est un point d'intersection de deux branches de la courbe $MGDGmZEV$, qui se coupent en G : car en comparant les coëfficiens de l'Equation générale marquée par (10) dans l'Art. 61, avec ceux de l'Equation particuliere $b^4u^2 + 2cb^3zu - \frac{1}{4}a^2z^4 - \frac{1}{3}afbz^3 - \frac{1}{3}agbz^3 - \frac{1}{2}gfb^2zz + c^2b^2z^2 = 0$, on a $\Delta = 0$, $Q = 0$, $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = b^4$, $E = 0$, $F = 0$, $G = 2cb^3$, $K = -\frac{1}{4}a^2$, $L = -\frac{1}{3}ab \times \overline{f+g}$, $M = \frac{2ccbb - gfbb}{2}$, ensorte qu'au point double G le rapport de (du) à (dz), c'est-à-dire, $\frac{du}{dz}\left(-\frac{G}{2D} \pm \frac{1}{2D}\sqrt{GG - 4DM}\right) = -\frac{c}{b} \pm \frac{1}{2b^4}\sqrt{4c^2b^6 - 4c^2b^6 + 2b^6gf} = -\frac{c}{b} \pm \frac{1}{2b}\sqrt{2gf}$; or ces deux valeurs $-\frac{2c + \sqrt{2gf}}{2b}$ & $-\frac{2c - \sqrt{2gf}}{2b}$ étant réelles & inégales, font connoitre † que le point double G est un point d'intersection de deux branches MGD, mGD. *Ce qu'il falloit faire voir par cet Exemple.*

COROLLAIRE.

LXVI. Ainsi en prenant sur l'axe la partie $G\Pi = b$, sur l'ordonnée principale GL la partie

* *Art.* 63. † *Art.* 63.

tie $G\Lambda = c$, & ſur cette même ordonnée principale, de part & d'autre du point Λ, les portions $\Lambda\theta$, $\Lambda\Phi$, égales l'une & l'autre à $\frac{\sqrt{gf}}{\sqrt{2}}$, les droites $\theta\Pi$, $\Phi\Pi$, feront paralleles aux deux tangentes de la courbe au point double G.

EXEMPLE II.

LXVII. Les mêmes choſes étant ſuppoſées comme dans l'Exemple précédent, ſoient encore pris les côtés $G\Pi$, $G\Lambda$, du triangle $G\Pi\Lambda$, prolongés autant qu'il ſera néceſſaire, le premier pour l'axe des (z), le ſecond pour l'axe des (u), c'eſt-à-dire, pour l'ordonnée principale d'une courbe $MGmZEV$*, dont la nature eſt exprimée par l'Equation $b^4 u^2 + 2cb^3 zu - \frac{1}{4}a^2 z^4 - \frac{1}{3}afbz^3 + c^2 b^2 z^2 = 0$, il eſt viſible, par la troiſieme Propoſition †, que cette courbe a un point double à l'origine G de ſon axe GQ & de ſon ordonnée principale GL. Car quand $GQ\ (z) = 0$, on a $\overline{QM}^2\ (uu) = 0$, & la valeur de $u = 0$, étant ſubſtituée dans l'Equation, il vient $\frac{1}{4}a^2 z^4 + \frac{1}{3}afbz^3 - c^2 b^2 z^2 = 0$, d'où l'on tire $zz = 0$ & $\frac{1}{4}aazz + \frac{1}{3}afbz - c^2 b^2 = 0$; or les deux premieres égalités $uu = 0$ & $zz = 0$ font connoitre qu'il y a au point G deux ordonnées égales & deux abſciſſes égales, & par conſéquent que les droites GL, GQ, ſont l'une &

* Fig. 42. † Art. 61.

& l'autre sécantes de la courbe $MGmZEV$ en un point double G. Mais, par la quatrieme Proposition & les Corollaires qui la suivent, il est évident que ce point double G est ici un point de rebroussement : car comparant chaque terme de l'Equation donnée, dans cet Exemple, avec celui qui lui correspond dans l'Equation générale de l'Art. 61, on a $\Delta = 0$, $Q = 0$, $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = b^4$, $E = 0$, $F = 0$, $G = 2cb^3$, $K = -\frac{1}{4}a^2$, $L = -\frac{1}{3}afb$, $M = ccbb$, ensorte qu'au point double G le rapport de (du) à dz, c'est-à-dire, $\frac{du}{dz}\ (-\frac{G}{2D} \pm \frac{1}{2D}\sqrt{GG - 4DM})$ est $= -\frac{c}{b} \pm \frac{1}{2b^4}\sqrt{4ccb^6 - 4ccb^6} = -\frac{c}{b} \pm 0$, ce qui fait voir que les deux valeurs $-\frac{G}{2D} + \frac{1}{2D}\sqrt{GG-4DM}$ & $-\frac{G}{2D} - \frac{1}{2D}\sqrt{GG-4DM}$, sont deux racines réelles, égales & de mêmes signes, & par conséquent * que le point double G est un point de rebroussement. Donc avant de supposer la courbe tracée sur le plan, on connoit par son Equation $b^4u^2 + 2cb^3zu - \frac{1}{4}a_2z^4 - \frac{1}{3}afbz^3 + c^2b^2z^2 = 0$, que cette courbe a un point de rebroussement à l'origine G de son axe. *Ce qu'il falloit faire voir par cet Exemple.*

COROLLAIRE.

LXVIII. Donc en prenant sur l'axe GQ la par-

* *Art.* 63.

partie $G\Pi = b$, & sur l'ordonnée principale la partie $G\Lambda = c$, si l'on joint les points Π & Λ, & que par le point G on tire la droite GP parallele à $\Lambda\Pi$, cette droite GP sera tangente de la courbe $MGmZEV$ au point de rebroussement G.

EXEMPLE III.

LXIX. Les mêmes choses étant supposées comme dans le premier Exemple *, à l'exception de ce qu'il y a ici de particulier, soit une courbe $MDmZEV$ †, dont le rapport des abscisses GQ (z) aux ordonnées (u) est exprimé par l'Equation $b^4u^2 + 2cb^3zu - \frac{1}{4}a^2z^4 - \frac{1}{3}afbz^3 + \frac{1}{3}agbz^3 + \frac{1}{2}fgb^2z^2 + c^2b^2zz = 0$, dans laquelle $f > g$; il est visible, par la troisieme Proposition ‡, que cette courbe a un point double à l'origine G de ses abscisses & de ses ordonnées. Car quand GQ $(z) = 0$, on a $uu = 0$, & cette valeur $(u = 0)$ étant substituée dans l'Equation donnée, on a $\frac{1}{4}a^2z^4 + \frac{1}{3}afbz^3 - \frac{1}{3}agbz^3 - \frac{1}{2}fgb^2zz - ccbbzz = 0$, d'où l'on tire $zz = 0$ & $\frac{1}{4}a^2zz + \frac{1}{3}afbz - \frac{1}{3}agbz - \frac{1}{2}fgbb - ccbb = 0$; or les deux premieres Equations $uu = 0$ & $zz = 0$ font connoitre qu'il y a en G, origine de l'axe, deux abscisses égales & deux ordonnées égales entre elles, & par conséquent que l'axe GQ & l'ordonnée principale GL sont l'une & l'autre sécantes de la courbe, en deux points, à leur origine G; donc cette origine G est un point double de la

* Art. 63. † Fig. 43. ‡ Art. 61.

la courbe $MDmZEV$, dont la nature eſt exprimée par l'Equation $b^4 u^2 + 2cb^3 zu - \frac{1}{4}a^2 z^4 - \frac{1}{3}afbz^3 + \frac{1}{3}agbz^3 + \frac{1}{2}fgb^2 zz + c^2 b^2 zz = 0$. Mais par la quatrieme Propoſition * & les Corollaires qui la ſuivent, il eſt évident que ce point double G eſt ici un point double inviſible ſur le plan, c'eſt-à-dire, une ovale infiniment petite; car les coëfficiens de l'Equation marquée (10) † étant ici $\Delta = 0$, $Q = 0$, $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = b^4$, $E = 0$, $F = 0$, $G = 2cb^3$, $K = -\frac{1}{4}a^2$, $L = \frac{agb - afb}{3}$, $M = \frac{fgbb + 2ccbb}{2}$, on voit que les coëfficiens D & M ſont affectés des mêmes ſignes, & que $GG\,(4c^2 b^6) < 4DM\,(2fgb^6 + 4c^2 b^6)$ enſorte que $\pm\sqrt{GG - 4DM} = \pm\sqrt{-2fgb^6} = \pm b^3\sqrt{-2fg}$ ſont des expreſſions imaginaires; d'où il ſuit que les deux racines $\frac{du}{dz} = (-\frac{G}{2D} \pm \frac{1}{2D}\sqrt{GG - 4DM}) = -\frac{c}{b} \pm \frac{1}{b}\sqrt{-2fg}$ ſont imaginaires, & par conſéquent que le rapport du (du) au (dz), au point double G, eſt un rapport imaginaire. Donc quoique ce point double G ſoit un point de la courbe (puiſque le rapport des coordonnées (z) & (u) y eſt réel) elle n'y a pas de tangente. Donc ‡ ce point double G

* *Art.* 63. † *Art.* 61. ‡ *Art.* 63.

G eſt un point double inviſible, ou, ce qui eſt la même choſe, une ovale infiniment petite conjuguée. *Ce qu'il falloit faire voir par cet Exemple.*

REMARQUES.

LXX. N'ayant pas établi tous les principes généraux qui ſervent à la connoiſſance des lignes du 4me ordre, ce n'eſt pas encore ici le lieu de faire connoitre les differentes proprietés des trois courbes dont nous venons de parler dans les Exemples précédens; cependant il ne ſera pas hors de propos de faire remarquer en paſſant, 1°. Que ces trois courbes * ſont compoſées de quatre branches infinies, dont il y en a deux qui s'étendent du côté des (z) poſitifs, & deux autres qui s'étendent du côté des (z) négatifs. 2°. Qu'en tirant par le point G la droite GP, parallele au troiſieme côté $\pi\lambda$ du triangle $G\pi\lambda$, & prolongée indéfiniment de part & d'autre du point G, cette droite GP coupe en deux portions égales toutes les droites, comme Mm, menées parallelement à l'ordonnée principale GL, & terminées de part & d'autre par la courbe, enſorte que cette droite GP eſt le diametre de la courbe.

A l'égard du premier Exemple †, on peut remarquer, 1°. Qu'en prenant ſur le diametre GP, du côté où les (z) ſont négatifs, le point B, tel que GB ſoit $= \frac{2}{3} \times \overline{g+f}$, & ſur

* Fig. 41. 42. & 43. † Fig. 41.

sur ce même diametre, de part & d'autre du point B, les parties BD, BE, égales l'une & l'autre à $\frac{1}{3}\sqrt{4gg-10fg+4ff}$, les points D & E feront les points de la courbe $MGDGmZEV$ auxquels les tangentes sont paralleles à l'ordonnée principale GL.

2°. Que toutes les droites, comme BC, menées parallelement à cette même ordonnée principale GL entre les points D & E, ne rencontreront la courbe en aucun point. Mais que toutes les droites, comme Gm & ZV, menées parallelement à cette même ordonnée principale [les premieres au-delà du point D du côté des (z) positifs, les autres au-delà du point E du côté des (z) négatifs] rencontreront la courbe en deux points, à quelques distances qu'elles soient du point G, ensorte que les deux portions $MGDGm$, ZEV, de cette courbe seront séparées l'une de l'autre de la distance $DE = \frac{2}{3}\sqrt{4gg-10fg+4ff}$.

3°. Si l'on prend sur le diametre GP, du côté où les (z) sont négatifs, le point F, tel que GF soit $=g$; si par ce point F on tire la droite IFK parallele à l'ordonnée principale GL, & si l'on prend sur cette droite IFK, de part & d'autre du point F, les portions FI, FK, égales l'une & l'autre à $\frac{g\sqrt{fg-3g}}{2a\sqrt{3}}$, les points I & K feront les points de la courbe auxquels les tangentes $I2$, $K3$, sont paralleles au diametre GP, ensorte que FI & FK sont les *maxima* du *folium* $GIDKG$.

4°. Tou-

4°. Toutes les droites menées parallelement au diametre GP, entre les tangentes I_2, K_3, rencontreront la courbe en quatre points, dont il y en aura toujours deux entre les droites BC, GL, un au-delà de GL, & le quatrieme au-delà de BC. Mais les droites, comme Mz, menées parallelement à ce diametre GP au-dessus de la droite K_3, ou au-dessous de la droite I_2, telles que mv, ne rencontreront la courbe qu'en deux points, l'un desquels sera au-delà de la droite GL, du côté des (z) positifs, & l'autre au-delà de la droite BC, du côté des (z) négatifs.

5°. Si l'on prend sur le diametre GP, du côté où les (z) sont négatifs, le point H, tel que GH soit double de GB; si par le point H on tire parallelement à l'ordonnée principale GL une droite HZ prolongée de part & d'autre du point H jusqu'à ce qu'elle aille rencontrer en Z & en V les tangentes GT, Gt, du point double G, prolongées autant qu'il sera nécessaire, je dis que ces points Z & V seront les points où ces tangentes GT, Gt, rencontreront la portion de courbe $ZzEuV$, ensorte que le *folium* $GIDKG$ se trouvera tout entier dans le triangle GZV.

A l'égard du second Exemple *, on peut remarquer, 1°. Qu'en prenant sur le diametre GP, du côté où les (z) sont négatifs, le point E, tel que GE soit $=\frac{4}{3}f$, ce point E sera le point de la courbe $MGmZEV$ auquel la tangente est parallele à l'ordonnée principale GL.

2°. Que

* Fig. 42.

2°. Que toutes les droites, comme BC, menées parallelement à l'ordonnée principale GL, entre les points E & G, ne rencontreront la courbe en aucun point; mais que toutes les droites, comme Mm, ZV, menées parallelement à cette même ordonnée principale GL [les premieres au-delà du point G, du côté des (z) positifs, les autres au-delà du point E, du côté des (z) négatifs] rencontreront la courbe en deux points, à quelque distance qu'elles soient du point G, ensorte que les deux portions infinies MGm & ZEV de cette courbe seront séparées l'une & l'autre de la distance $GE = \frac{4}{3}f$.

3°. Que toutes les droites, comme MZ, menées parallelement au diametre GP, & de part & d'autre de ce diametre, ne rencontreront la courbe qu'en deux points, l'un desquels sera au-delà de la droite GL, du côté des (z) positifs, l'autre au-delà de la droite BC du côté des (z) négatifs.

A l'égard du troisieme Exemple*, on peut remarquer, 1°. Qu'en prenant sur le diametre GP, du côté où les (z) sont négatifs, le point B, tel que GB soit $= \frac{2}{3} \times \overline{f-g}$, & sur ce même diametre, de part & d'autre du point B, les portions BD, DE, égales l'une & l'autre à $\frac{1}{3}\sqrt{4gg+10fg+4ff}$, ces points D & E seront les points de la courbe MDm ZEV où les tangentes seront paralleles à l'ordonnée principale GL.

2°. Que toutes les droites, comme BC, me-

* Fig. 43.

menées parallelement à l'ordonnée principale GL, entre les points D & E, ne rencontreront la courbe en aucun point, excepté la droite GL, qui paſſera par le point double inviſible, ou ovale infiniment petite G; mais que toutes les droites, comme Mm, ZV, menées parallelement à cette même ordonnée principale GL, les premieres au-delà du point D, du côté des (z) poſitifs, les ſecondes au-delà du point E, du côté des (z) négatifs, rencontreront toujours la courbe en deux points, à quelque diſtance qu'elles ſoient du point G, enſorte que les deux portions infinies MDm, ZEV, de cette troiſieme courbe feront ſéparées & diſtantes l'une de l'autre de la grandeur $DE = \frac{2}{3}\sqrt{4gg + 10fg + 4ff}$.

3°. Que toutes les droites, comme MZ, menées parallelement au diametre GP, & de part & d'autre de ce diametre, ne rencontreront la courbe qu'en deux points, l'un deſquels, comme M, ſera au-delà de la droite GL, du côté des (z) poſitifs, l'autre au-delà de la droite BC, du côté des (z) négatifs.

PROPOSITION V.

THEOREME.

LXXI. *Si les indéterminées* (z) *&* (u) *de l'Equation marquée ici par* (20) *repréſentent la premiere les abſciſſes* GQ, *la ſeconde les ordonnées* QM *d'une ligne du* 4*me ordre* MGDGARCRm *, *dont*

* Fig. 44. 45. 46. & 47.

dont la nature soit exprimée par l'Equation (20) (*qui ne differe de celle de l'Art.* 61, *marquée par* (10), *qu'en ce que les coëfficiens indéterminés* F & L *sont ici déterminés à être l'un* $F = \frac{E\sqrt{M}}{\sqrt{K}} + \frac{G\sqrt{K}}{\sqrt{M}}$, *l'autre* $L = 2\sqrt{KM}$): *je dis que cette ligne a deux points doubles sur son axe, l'un à l'origine* G *des abscisses, l'autre en un point* R *distant du point* G *de la grandeur* $GR = -\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{K}}$.

$$(20) \ldots \Delta u^4 + \overline{Qz + A} \times u^3 + \overline{Bzz + Cz + D} \times u^2 + \overline{Ez^3 + \frac{E\sqrt{M}}{\sqrt{K}}zz + \frac{G\sqrt{K}}{\sqrt{M}}zz + Gz} \times u + Kz^4 + 2\sqrt{KM} \times z^3 + Mz^2 = 0.$$

DEMONSTRATION.

On a déja vu * que toutes ces courbes ont un point double à l'origine *G* de leur axe, ainsi il reste à prouver qu'elles en ont un autre en *R*, ce qui est très aisé: car, quand $u = 0$, l'Equation (20) devient $Kz^4 + 2\sqrt{KM} \times z^3 + Mzz = 0$, égalité du 4me degré, dont les quatre racines sont $z = 0$, $z = 0$, $z = -\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{K}}$

z = -

* Art. 62.

$z = -\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{K}}$; les deux premieres appartiennent visiblement au point double G, origine des indéterminées, & les deux dernieres à un point R pris sur l'axe, & distant de G de la grandeur $GR = -\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{K}}$. Donc au point R il y a deux abscisses qui se confondent en une. Mais, en ce même point R, deux des ordonnées qui y correspondent, sont égales entre elles: car en substituant dans l'Equation (20) au-lieu de (z) la valeur de cette indéterminée au point R, c'est-à-dire $-\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{K}}$, au-lieu de (z) il vient l'égalité marquée ici par (L)

$$(L) \ldots \Delta u^4 + Au^3 - \frac{Q\sqrt{M}}{\sqrt{K}} u^3 + \frac{BM}{K} u^2 - \frac{C\sqrt{M}}{\sqrt{K}} u^2 + Du^2 = 0,$$

dont les quatre racines donnent les valeurs des quatre ordonnées correspondantes au point R de l'axe GQ: or dans cette égalité il y en a deux réelles & égales entre elles, qui sont $u = 0$ & $u = 0$; donc au point R il y a non seulement deux abscisses qui se confondent en une, mais encore deux ordonnées égales entre

elles & à zero; donc la courbe passe deux fois par ce même point *R* *, donc ce point *R* est un point double de la courbe *MGDG ARCRm*, aussi-bien que le point *G*; donc toutes les courbes, dont la nature est exprimée par l'Equation marquée par (20), ont deux points doubles sur leur axe. *C. Q. F. D.*

PROPOSITION VI.

PROBLEME.

LXXII. *Toutes choses demeurant les mêmes comme dans le Théor. précédent, déterminer la nature du second point double* R, *c'est-à-dire, connoitre si ce second point double est un point d'intersection de deux branches, ou s'il est un point de rebroussement, ou enfin s'il est une ovale infiniment petite conjuguée.* La nature du point double *G* étant déja déterminée par la quatrieme Proposition, on ne la détermine pas ici.

SOLUTION.

La Solution de ce Problême ne differe presque pas de celle de l'Art. 63. En effet on cherchera d'abord † quel est le rapport du (dz) au (du) dans tous les points doubles de la courbe, en differentiant deux fois son Equation, marquée par (20), dans l'exposé de la Proposition précédente; cette double dif-

* *Art.* 52. † *Art.* 46.

differentiation donnera l'Equation differentielle, marquée ici par 2 Σ.

$$2\Sigma \ldots \left\{\begin{array}{l} +6\Delta u^2 \\ +3Qzu \\ +3Au \\ +Bzz \\ +Cz \\ +D \end{array}\right\} du^2 \left.\begin{array}{l} +3Qu^2 \\ +4Bzu \\ +2Cu \\ +3Ezz \\ +\frac{2E\sqrt{M}}{\sqrt{K}}z \\ +\frac{2G\sqrt{K}}{\sqrt{M}}z \\ +G \end{array}\right\} dz\,du \left.\begin{array}{l} +Buu \\ +3Euz \\ +\frac{E\sqrt{M}}{\sqrt{K}}u \\ +\frac{G\sqrt{K}}{\sqrt{M}}u \\ +6Kzz \\ +6z\sqrt{KM} \\ +M \end{array}\right\} dz^2 = 0.$$

On rendra enfuite cette Equation differentielle propre au point double R, dont on connoit l'exiftence & la pofition par l'Equation rationnelle, marquée (20) Art. 71, en fubftituant dans l'Equation differentielle, au-lieu des indéterminées (z) & (u), leurs valeurs au point R, qui font Art. 71. $z = -\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{K}}$ & $u = 0$, & cette Equation differentielle 2 Σ deviendra $\overline{\frac{BM}{K} - \frac{C\sqrt{M}}{\sqrt{K}} + D} \times du^2 \overline{+ \frac{EM}{K} - G}$

$\times dzdu + Mdz^2 = 0$, & ensuite $\frac{dz}{du}$

$$= \frac{KG - EM}{2KM} \pm \frac{1}{2KM}$$

$$\sqrt{\overline{EM - KG}^2 + 4KM \times C\sqrt{KM} - BM - KD},$$

égalité qui exprime les deux rapports de (dz) à (du) au point double R; or il est visible qu'il peut arriver trois differens cas, car la grandeur $\overline{EM - KG}^2 + 4KM \times C\sqrt{KM} - BM - KD$, qui est sous le signe radical, peut être ou une grandeur positive, ou une grandeur négative, ou bien être $= 0$, selon que le quarré $\overline{EM - KG}^2$ est plus grand, ou plus petit, ou égal à $4KM \times KD + BM - C\sqrt{KM}$.

Dans le 1er cas les deux rapports $\frac{dz}{du}$

$$= \frac{KG - EM}{2KM} \pm \frac{1}{2KM}$$

$$\sqrt{\overline{EM - KG}^2 + 4KM \times C\sqrt{KM} - BM - KD}$$

sont réels; d'où il suit qu'il y a au point double R deux tangentes, & par conséquent * que ce point double R est un point d'intersection de deux branches ARC, CRM, de la courbe $MGDGARCRm$.

Dans le second cas, les deux rapports précédens sont imaginaires; d'où il suit qu'il n'y a point de tangente au point double R, & par

* Art. 52.

par conséquent * que ce point double est invisible, c'est-à-dire, qu'il y a en ce point *R* une ovale infiniment petite qu'on peut nommer le point conjugué de la courbe *MDACm* †.

Dans le troisieme cas, les deux rapports précédens sont l'un & l'autre égaux à $\frac{KG-EM}{2KM}$ $\mp o$; d'où il suit que les deux tangentes au point double se confondent en une, & par conséquent que ce point double *R* est ou un point de rebroussement ‡ de la courbe *MGDGARm*, ou une Osculation, ou bien une Lemniscate infiniment petite conjuguée.

Donc l'Equation differentielle, marquée ci-dessus par $z\Sigma$, fera toujours connoitre la nature du point double *R*: & avant même de supposer la courbe décrite sur le plan, on connoitra si ce point double *R* est ou une intersection, ou un point conjugué, ou un rebroussement, en se servant de l'égalité $\frac{dz}{du} = \frac{KG-EM}{2KM} \pm \frac{1}{2KM}$ $\sqrt{\overline{EM-KG}^2+4KM\times G\sqrt{KM}-BM-KD}$.

Ce qu'il falloit trouver.

EXEMPLE I.

LXXIII. Soit la courbe *MGDGARCRm* ‡ dans laquelle le rapport des abscisses *GQ* (*z*) aux

* *Art. id.* † Fig. 46.

‡ *Art.* 52. *Voyez ce qui est dit dans la suite de ce Traité sur les Osculations & les Lemniscates infiniment petites conjuguées.* ‡ Fig. 44.

aux ordonnées QM (u) eſt exprimé par l'Equation ſuivante

$$z = -\frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{aa + 4u\sqrt{4au + aa}}.$$

Je dis 1°. que cette courbe a deux points doubles ſur ſon axe, l'un à l'origine G de ſes abſciſſes & de ſes ordonnées, l'autre en un point R diſtant de G de la grandeur $GR = -a$; 2°. Que ces deux points doubles ſont des points d'interſection de differentes branches. Car en faiſant évanouïr les ſignes radicaux de l'Equation donnée, on a l'Equation $au^3 + \frac{1}{4}a^2u^2 = \frac{1}{4}z^4 + \frac{1}{2}az^3 + \frac{1}{4}aazz$, qui eſt viſiblement un cas particulier de l'Equation générale marquée par (20) dans l'Art. 71. En effet il eſt viſible par la cinquieme Propoſition, que cette courbe a deux points doubles ſur ſon axe GQ; car quand $uu = 0$, on a $zz = 0$ & $zz + 2az + aa = 0$, les deux premieres égalités $uu = 0$, $zz = 0$, font connoitre que les droites GQ, GL, ſont l'une & l'autre ſécantes de la courbe en un point double G qui eſt à l'origine des abſciſſes & des ordonnées; & la premiere & la troiſieme égalité $uu = 0$ & $zz + 2az + aa = 0$, font connoitre que l'axe GQ & une droite RC parallele aux ordonnées QM, & diſtante de G de la grandeur $GR = -a$, ſont l'une & l'autre ſécantes de la même courbe $MGDGARCRm$ en un autre point double R diſtant de G de la grandeur $GR = -a$. Mais par les quatrieme & cinquieme Propoſitions il eſt évident que les points G & R ſont l'un & l'autre des points d'interſection de la courbe $MGDGARCRm$: car en compa-

parant l'Equation donnée $au^3 + \frac{1}{4}a^2u^2 = \frac{1}{4}z^4 + \frac{1}{2}az^3 + \frac{1}{4}aazz$ avec les Equations générales marquées par (10) & par (20) dans les Art. 62 & 71, on trouve $\Delta = 0$, $Q = 0$, $A = a$, $B = 0$, $C = 0$, $D = \frac{1}{4}aa$, $E = 0$, $F\ (\frac{E\sqrt{M}}{\sqrt{K}} + \frac{G\sqrt{K}}{\sqrt{M}}) = 0$, $G = 0$, $K = -\frac{1}{4}$, $L\ (2\sqrt{KM}) = -\frac{1}{2}a$ & $M = -\frac{1}{4}aa$, ensorte 1°. Qu'au point double G, le rapport de (du) à (dz) c'est-à-dire $\frac{du}{dz}\ (-\frac{G}{2D} \pm \frac{1}{2D}\sqrt{GG - 4DM})$ * $= \pm 1$; 2°. Qu'au point double R, le rapport de (du) à (dz), ou, ce qui revient au même, $\frac{dz}{du}\ (\frac{KG - EM}{2KM} \pm \frac{1}{2KM}\sqrt{\overline{EM - KG}^2 + 4KM \times \overline{C\sqrt{KM} - BM - KD}})$ † $= \frac{0 \times 8}{aa} \pm \frac{8}{aa}\sqrt{0 + \frac{1}{4}aa \times 0 - 0 + \frac{1}{16}aa} = \pm 1$. Or puisqu'au point double G, $\frac{du}{dz} = \pm 1$, il s'ensuit qu'il y a deux tangentes en ce point double, & par conséquent une intersection de deux branches finies ou infinies de la courbe $MGDGARCRm$. De même, puisqu'au point double R, $\frac{dz}{du} = \pm 1$, il s'ensuit qu'il y a aussi deux tangentes en ce point double, & par conséquent deux branches finies ou infinies, de la courbe $MGDGARCRm$, qui y

* Art. 63. † Art. 72.

y paſſent. Donc il eſt évident, par les Propoſitions quatrieme & ſixieme, que les deux points doubles G & R de la courbe $MGDGARCRm$, dont la nature eſt exprimée par l'Equation $z = -\frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{aa + 4u\sqrt{4au + aa}}$, ſont des points d'interſection. *Ce qu'il falloit faire voir par cet Exemple.*

COROLLAIRE.

LXXIV. Donc * 1°. ſi, de part & d'autre du point double G, on prend ſur l'axe GQ les parties $G\pi$, $G\lambda$, $= 1$; ſi des points π λ on mene du côté où les (u) ſont négatifs les droites πT, λt, paralleles aux ordonnées, & l'une & l'autre auſſi $= 1$, les droites GT, Gt, feront viſiblement les deux tangentes de la courbe au point double G. 2°. Si, de part & d'autre du point R, on prend ſur l'axe GQ les parties Rq, $Rſ$, l'une & l'autre $= 1$, & ſi des points q & $ſ$ on mene du côté où les (u) ſont négatifs les droites qT, $ſt$, paralleles aux ordonnées, & l'une & l'autre $= 1$, les droites RT, Rt, feront les deux tangentes de la courbe au point double R.

EXEMPLE II.

LXXV. Soit la courbe $MGARm$ †, dans laquelle le rapport des abſciſſes GQ (z) aux ordonnées QM (u) eſt exprimé par l'Equation

* Fig. 44.   † Fig. 45.

tion $z = -\frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{aa + 8u\sqrt{au}}$; je dis que cette courbe a deux points de rebrousse-ment sur son axe GQ, l'un à l'origine G de ses abscisses, l'autre au point R, distant de l'origine G de la grandeur $GR = -a$; car l'Equation donnée étant délivrée des signes radicaux, devient $au^3 = \frac{1}{4}z^4 + \frac{1}{2}az^3 + \frac{1}{4}aazz$, & sous cette forme elle se rapporte aux Equations générales marquées par (10) & par (20) dans les Art. 62 & 71. En effet dans cet Exemple les coëfficiens indéterminés Δ, Q, A, B, C, D, E, &c. des Art. 62 & 71, sont $\Delta = 0$, $Q = 0$, $A = a$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$, $E = 0$, $F\left(\frac{E\sqrt{M}}{\sqrt{K}} + \frac{G\sqrt{K}}{\sqrt{M}}\right) = 0$, $G = 0$, $K = -\frac{1}{4}$, $L\,(2\sqrt{KM}) = -\frac{1}{2}a$, $M = -\frac{1}{4}aa$. Or le coëfficient $L\,(-\frac{1}{2}a)$ étant $= 2\sqrt{KM}$, & le coëfficient $F\,(o)$ étant $= \frac{E\sqrt{M}}{\sqrt{K}} + \frac{G\sqrt{K}}{\sqrt{M}}$, il s'ensuit * que la courbe $MGARm$ a deux points doubles sur son axe, l'un à l'origine G des abscisses & des ordonnées, l'autre en un point R distant de G de la grandeur $GR = -a = -\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{K}}$. Mais le rapport de (dz) à (du) au point double G étant toujours exprimé par $\frac{du}{dz}$ $(-\frac{G}{2D}$ $\pm$

* Art. 71.

$\pm \frac{1}{2D} \sqrt{GG - 4DM}) * = 0 \pm \frac{0}{0}$, il s'enſuit que les deux tangentes de la courbe au point double G ſe confondent avec l'ordonnée principale GL, & par conſéquent que ce point double G eſt un point de rebrouſſement auquel l'ordonnée principale GL eſt tangente: de même le rapport de (du) à (dz) au point double R, étant exprimé par $\frac{dz}{du} \left(\frac{KG - EM}{2KM} \pm \frac{1}{2KM} \sqrt{\overline{EM - KG}^2 + 4KM \times C\sqrt{KM} - BM - KD} \right)$ † $= \frac{0 \times 8}{aa} \pm \frac{8}{aa} \sqrt{0 + \frac{1}{4}aa \times 0} = 0 \pm \frac{4 \times 0}{a} = \pm \frac{0}{a}$, il s'enſuit ‡ que les deux tangentes au point double R ſe confondent en une & avec une droite RC menée par le point double R parallelement aux ordonnées, & par conſéquent que ce point double R eſt encore un point de rebrouſſement, auquel la droite RC parallele aux ordonnées QM eſt tangente. Donc avant de ſuppoſer la courbe $MGARm$ décrite ſur le plan, on connoit par ſon Equation $z = -\frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{aa + 8u\sqrt{au}}$ non ſeulement que cette courbe a deux points doubles ſur ſon axe GQ, mais encore le lieu où ces deux points doubles ſont ſitués, & quelle eſt leur nature. *Ce qu'il falloit faire voir par cet Exemple.*

EXEM-

* *Art.* 63. † *Art.* 72. ‡ *Art* 63 & 72.

EXEMPLE III.

LXXVI. Soit la courbe $MDACm$ * dans laquelle le rapport des abſciſſes GQ (z) aux ordonnées QM (u) eſt exprimé par l'Equation

$$z = -\tfrac{1}{2}a \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{aa \pm 4u\sqrt{4au - aa}}$$

on trouvera que cette courbe a ſur ſon axe GQ deux points doubles inviſibles : ou, ce qui revient au même, deux ovales infiniment petites, qu'on peut nommer, avec M. Newton, *deux points conjugués*, l'un à l'origine G des abſciſſes, l'autre en un point R diſtant de G de la grandeur $GR = -a$. Car, par l'évanouïſſement des incommenſurables, cette Equation devient $au^3 - \frac{1}{4}a^2u^2 = \frac{1}{4}z^4 + \frac{1}{2}az^3 + \frac{1}{4}aazz$, & ſous cette forme elle ſe rapporte évidemment aux Equations (10) & (20) des Art. 61 & 71. En effet, dans cet Exemple, les coëfficiens des Equations (10) & (20) ſont $\Delta = 0$, $Q = 0$, $A = a$. $B = 0$,

$C = 0$, $D = -\frac{1}{4}aa$, $E = 0$, $F\left(\frac{E\sqrt{M}}{\sqrt{K}} + \frac{G\sqrt{K}}{\sqrt{M}}\right) = 0$,

$G = 0$, $K = -\frac{1}{4}$, $L = -\frac{1}{2}a = -2\sqrt{KM}$, $M = -\frac{1}{4}aa$. Or le coëfficient $F = 0$ étant

auſſi égal à $\frac{E\sqrt{M}}{\sqrt{K}} + \frac{G\sqrt{K}}{\sqrt{M}}$, & le coëfficient

$L = -\frac{1}{2}a$ étant auſſi égal à $-2\sqrt{KM}$, il s'enſuit † que la courbe $MDACm$ a deux points doubles ſur ſon axe GQ, l'un à l'origine G de

* Fig. 46. † *Art.* 71.

de cet axe, l'autre en un point R distant de G de la grandeur $GR = -\frac{L}{2K}$, qui est ici $= -a$.

Mais ces deux points doubles G & R sont des points conjugués : car 1°. au point double G le rapport de dz à du étant toujours exprimé par cette fraction $\frac{du}{dz} = -\frac{G}{2D} \pm \frac{1}{2D} \sqrt{GG - 4DM}$, & les coëfficiens G & D étant ici égaux, l'un à zero, l'autre à une grandeur négative, on a $\frac{du}{dz} = 0 \mp \sqrt{-1}$. Or ces deux grandeurs $\mp \sqrt{-1}$ étant l'une & l'autre des grandeurs imaginaires, il s'ensuit que les deux tangentes de la courbe au point double G sont imaginaires, tandis que le rapport de l'abscisse à l'ordonnée correspondante y est réel; donc * le point double G est un point conjugué. 2°. Au point double R le rapport de dz à du étant toujours exprimé par $\frac{dz}{du} = \frac{KG - EM}{2KM} \pm \frac{1}{2KM}$

$$\sqrt{\overline{EM - KG}^2 + 4KM \times C\sqrt{KM} - BM - KD},$$

& ces grandeurs étant ici $= \mp \sqrt{-1}$, qui sont des imaginaires, il s'ensuit que les deux tangentes au point double R sont imaginaires, & par conséquent † que ce point double R est un point conjugué aussi-bien que le point double G. Donc avant de suppo-
ser

* *Art.* 63. † *Art.* 72.

ser la courbe décrite, soit par un mouvement continu, soit par plusieurs points, on connoit par son Equation non seulement qu'elle a deux points conjugués sur son axe, mais encore la situation de ces points. *Ce qu'il falloit faire voir par cet Exemple.*

REMARQUES.

LXXVII. Il n'est peut-être pas hors de propos de faire remarquer ici, 1°. Que les trois courbes dont on a parlé dans les trois derniers Exemples, sont composées chacune de deux branches qui s'étendent à l'infini de part & d'autre de l'ordonnée principale GL, mais du même côté par rapport à l'axe GQ. 2°. Qu'après avoir partagé GR en deux parties égales au point B, si par ce même point B on mene une droite BAI parallele à l'ordonnée principale GL, cette droite coupera en deux parties égales toutes les droites, comme Mm, menées parallelement à l'axe GQ, & terminées de part & d'autre par la courbe, ensorte que cette droite BI sera le diametre de la courbe. Voilà ce que ces trois courbes ont de commun; voici maintenant ce qu'elles ont de propre.

Dans le premier Exemple *, si l'on prend 1°. sur le diametre BI, du côté où les (u) sont négatifs, le point E, tel que BE soit $= \frac{1}{2}a$; si par ce point E on mene la droite EH parallele à l'axe GQ, & qu'on prenne sur cette droite EH, de part & d'autre du point

* Fig. 41.

point E, les parties EH, EF, égales à $\frac{a}{2}\sqrt{1-\frac{2}{\sqrt{27}}}$, & les parties EK, EO, égales à $\frac{a}{2}\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{27}}}$, les points H, F, K, O, feront les points de la courbe qui ont des tangentes Hf, Ff, Kf, Of, paralleles aux ordonnées QM.

2°. Si on prend fur l'ordonnée principale GL & fur fa parallele RI, du côté où les (u) font négatifs, les points D & C, tels que GD & RC foient l'une & l'autre $=\frac{1}{2}a$, les points D & C feront deux des points de la courbe $MGDGARCRM$ auxquels les tangentes DT, CT, font paralleles à l'axe.

3°. Si on prend fur le diametre BI, du côté où les (u) font pofitifs, le point A, tel que BA foit égal à la racine réelle de cette égalité $u^3+\frac{1}{4}auu-\frac{1}{64}a^3=0$, on aura le point où ce diametre eft coupé par la courbe parallelement à l'axe, enforte que la tangente AT en ce point eft parallele à l'axe GQ. Sur quoi il faut remarquer que cette égalité $u^3+\frac{1}{4}auu=\frac{1}{64}a^3$ ne peut avoir qu'une feule racine réelle : D'où il fuit que le diametre BI ne rencontre la courbe qu'en un feul point A.

4°. Toutes les droites, comme EH, menées parallelement à l'axe GQ, entre les points A & D, coupent la courbe en quatre points. Toutes les droites, comme Mm, menées parallelement au même axe GQ au deffus du point A, par rapport au point B, cou-

couperont toujours la courbe en deux points, à quelque distance que le point *I* soit du point *A*; Enfin toutes les droites menées parallelement à l'axe au dessous du point *D* par rapport au point *G*, ne couperont la courbe en aucun point; D'où il suit que cette courbe *MGDGARCRm* s'étend à l'infini du côté des (*u*) positifs, & ne s'étend pas au-delà des points *D* & *C* du côté des (*u*) négatifs.

5°. Toutes les droites menées parallelement à l'ordonnée principale *GL* entre les droites *Hf*, *Kf*, & entre les droites *Ff*, *Of*, coupent la courbe en trois points: mais celles qui sont menées parallelement à la même ordonnée principale *GL*, entre les droites *Hf*, *Ff*, ne la coupent qu'en un seul point, de même que les droites menées parallelement à l'ordonnée principale au-delà des droites *Kf*, *Of*, par rapport au point *G*.

Ensorte qu'il est aisé de s'appercevoir, 1°. Que la courbe *MGDGARCRm* est composée de deux branches infinies *GM*, *Rm*, de deux *folium* *GHDKG*, *ROCFR*, & d'une sinuosité *GAR*, ce qui pourroit lui faire donner le nom de *Bifolium Parabolique*. 2°. Que ces quatre parties principales de la courbe *MGDGARCRm* sont continues, le folium *GHDKG* n'étant qu'une prolongation de la branche infinie *GM*: la sinuosité *GAR*, une prolongation du demi-folium *DKG*: le folium *ROCFR*, une prolongation de la sinuosité *GAR*, & enfin la branche infinie *Rm*, une prolongation du folium *ROCFR*.

A l'égard du second Exemple *, 1°. si l'on prend sur le diametre BI, du côté où les (u) sont positifs, la droite $BA = \frac{1}{4}a$, on aura le point A où la courbe $MGARm$ coupe le diametre, & où la tangente AT est parallele à l'axe.

2°. Toutes les droites menées parallelement à l'axe GQ, entre cet axe & la tangente AT, couperont la courbe en quatre points, au-lieu que toutes les droites, comme MIm, menées parallelement à ce même axe GQ au-delà du point A, par rapport au point B, ne la couperont qu'en deux points, à quelque distance que le point I soit du point G: enfin toutes les droites menées parallelement à ce même axe GQ au-delà du point B, par rapport au point A, ne rencontreront la courbe en aucun point, ensorte que cette courbe est toute entiere du côté des (u) positifs, & n'a par conséquent que des ordonnées positives.

3°. Toutes les droites, comme QM, menées parallelement à l'ordonnée principale GL, ne rencontrent la courbe qu'en un seul point, soit que le point Q soit situé entre les points doubles rebroussans G & R, ou au-delà de ces points doubles par rapport au point B, & à quelque distance qu'ils soient de ces points doubles G & R.

Ensorte qu'il est aisé de voir que cette courbe n'a que deux branches infinies AGM, ARM, qui font, pour ainsi dire, deux cornes aux points rebroussans G & R, ce qui pour-

* Fig. 45.

pourroit lui faire donner le nom de *Parabole-Diceratoïde*.

Pour ce qui eſt maintenant du troiſieme Exemple *, on remarquera, 1°. Qu'en prenant ſur l'ordonnée principale GL & ſur ſa parallele LI, du côté où les (u) ſont poſitifs, les droites GD, RC, l'une & l'autre $= \frac{1}{4}a$, on aura les points D & C de la courbe $MADCm$ où les tangentes DT, CT, ſont paralleles à l'axe GQ.

2°. Si on prend ſur le diametre BI, du côté où les (u) ſont poſitifs, la droite BA égale à la racine réelle de cette égalité $u^3 - \frac{1}{4}auu - \frac{1}{64}a^3 = 0$, le point A ſera celui où le diametre BI eſt coupé parallelement à l'axe par la courbe $MDACm$, enſorte que la tangente AT au point A ſera parallele à l'axe GQ.

3°. Toutes les droites menées parallelement à l'axe GQ, entre les points G & D, ne rencontreront pas la courbe, non plus que leurs paralleles menées de l'autre côté du point G par rapport au point D.

4°. Mais toutes les droites menées parallelement à l'axe GQ, entre les tangentes DT, AT, rencontreront la courbe en quatre points, tandis que leurs paralleles MIm, menées au-delà du point A, par rapport au point B, ne la rencontreront qu'en deux points, à quelque diſtance que le point I ſoit du point A.

5°. Que toutes les droites, comme QM, menées parallelement à l'ordonnée principale GL, entre les points doubles G & R, ou au-delà de ces points doubles par rapport au point B, ne rencontreront la courbe qu'en un

* Fig. 46.

un seul point M, à quelque distance qu'elles soient de ces points doubles G & R.

Ensorte qu'il est aisé de concevoir, 1°. Que la courbe $MDACm$, dont la nature est exprimée par l'Equation $z + \frac{1}{2}a = \pm \frac{1}{2}\sqrt{aa \pm 4u\sqrt{4au - aa}}$, n'a que deux branches ADM, ACm (lesquelles étant, pour ainsi dire, *réfléchies* aux points D & C *par sinuosité*, parallelement à l'axe GQ, s'étendent à l'infini de part & d'autre du diametre BAP) & deux points conjugués, ou, ce qui est la même chose, deux ovales infiniment petites G & R, distantes de la courbe de la grandeur DG, ou $CR = \frac{1}{4}a$, & séparées l'une de l'autre par la droite $GR = a$, ce qui peut faire donner à cette courbe le nom de *Parabole Biponctuée*.

EXEMPLE IV.

LXXVIII. Soit la courbe $GaRMDLGAR\Phi CHG$*, dont GQ est l'axe, & GL l'ordonnée principale, faisant entre elles un angle quelconque LGQ, & dans laquelle le rapport des abscisses GQ (z) aux ordonnées QM (u) est exprimé par l'Equation $z = \frac{1}{2}b \pm \frac{1}{2}\sqrt{bb \pm 4u\sqrt{\frac{1}{2}aa - uu}}$, où l'on suppose $b < a$; je dis que cette courbe a deux points doubles sur son axe, l'un en G, origine des abscisses GQ (z), l'autre en un point R, distant de G de la grandeur $GR = b$, & que ces deux

* Fig. 47.

deux points doubles ſont deux points d'interſection de differentes branches. Car en faiſant évanouïr les ſignes radicaux de l'Equation donnée, on a cette Equation $\frac{1}{2}a^2u^2 - u^4 = z^4 - 2bz^3 + bbzz$, qui eſt un cas particulier de l'Equation marquée par (20) dans l'Art. 71. En effet, en comparant ces deux Equations, on trouve que les coëfficiens Δ, Q, A, B, C, D, K, L, M, de l'Equation marquée par (20) ſont ici $\Delta = -1$, $Q = 0$, $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = \frac{1}{2}aa$, $E = 0$, $G = 0$, $F = 0$, $K = -1$, $L = +2b$, $M = -bb$; or le coëfficient $L\ (2b) = 2\sqrt{KM}$ & $F = \frac{EM + GK}{\sqrt{KM}} = 0$. Donc * la courbe a deux points doubles ſon axe, l'un à l'origine G de ſes abſciſſes, l'autre en un point R, diſtant de G de la grandeur $GR = -\frac{b}{2K} = -\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{K}} = \frac{2b}{2} = b$. *Ce qu'il falloit prouver en premier lieu.*

Mais ces deux points doubles G & R ſont ici des point d'interſection: car 1°. au point double G on a $\frac{du}{dz} = \left(-\frac{G}{2D} \pm \frac{1}{2D}\sqrt{GG - 4DM}\right) = \pm\frac{b\sqrt{2}}{a}$; or les deux rapports $+\frac{b\sqrt{2}}{a}$ & $-\frac{b\sqrt{2}}{a}$, étant des gran-

* *Art.* 71.

grandeurs differentes l'une de l'autre à cauſe des differens ſignes + & — dont ils ſont affectés, il ſuit qu'il y a deux tangentes au point double G, & par conſéquent que ce point double eſt un point d'interſection de deux branches. 2°. Au point double R, on a

$$\frac{dz}{du} = \frac{KG - EM}{2KM} \pm \frac{1}{2KM} \overline{\sqrt{\overline{EM - KG}^2 + 4KM \times C\sqrt{KM} - BM - KD}}$$

$= 0 \pm \frac{1}{2bb}\sqrt{2bbaa} = \pm \frac{a}{b\sqrt{2}}$; or ces deux valeurs $+ \frac{a}{b\sqrt{2}}$ & $- \frac{a}{b\sqrt{2}}$, étant differentes l'une de l'autre à cauſe des ſignes + & — dont elles ſont affectées, il s'enſuit qu'il y a encore deux tangentes au point double R, & par conſéquent que ce point eſt une interſection de deux branches de la courbe $GaRM$ $DLGAR\phi CHG$. Ainſi avant de ſuppoſer la courbe décrite ſur le plan, on connoit non-ſeulement qu'elle a deux points doubles ſur ſon axe, & le lieu où ils ſont ſitués, mais encore la nature de ces deux points doubles, qui eſt d'être des points d'interſection. *Ce qu'il falloit faire voir par cet Exemple.*

COROLLAIRE.

LXXIX. Donc ſi l'on prend ſur l'axe GQ les points q & λ (le premier du côté où les z ſont poſitifs, & le ſecond du côté où les z ſont négatifs) tels que les parties de l'axe Rq, $G\lambda$, ſoient l'une & l'autre $= \frac{a}{\sqrt{2}}$: ſi par les points

points q & λ on mene parallelement à l'ordonnée principale GL, les droites qT, λT, prolongées de part & d'autre de l'axe jusqu'en θ, ensorte que qT, $q\theta$, λT, $\lambda\theta$, soient égales à (b): si des points R & G on tire les droites RT, $R\theta$, GT, $G\theta$, il est visible que les deux premieres RT, $R\theta$, seront les deux tangentes de la courbe au point double R, & que les deux dernieres GT, $G\theta$, seront les deux tangentes de la courbe au point double G.

REMARQUES.

LXXX. On peut remarquer ici, 1°. Que toutes les droites, comme MN, menées en dedans de la courbe $GaRMDLGARNCnG$ parallelement à l'ordonnée principale GL, rencontrent cette courbe en quatre points M, μ, ν, N, & l'axe en un point Q, de telle façon néanmoins que $QM = QN$, & $Q\mu = Q\nu$; Car l'Equation $\frac{1}{2}aauu - u^4 = z^4 - 2bz^3 + bbzz$ donne $\pm u = \frac{1}{2}\sqrt{aa \pm \sqrt{a^4 - 16z^4 + 32z^3 - 16bbzz}}$, ainsi en prenant GQ pour l'indéterminée (z), on aura QM $(+u)$ ou QN $(-u)$ $= \frac{1}{2}\sqrt{aa + \sqrt{a^4 - 16z^4 + 32z^3 - 16bbzz}}$ & $Q\mu$ $(+u)$ ou bien $Q\nu$ $(-u)$ $= \frac{1}{2}\sqrt{aa - \sqrt{a^4 - 16z^4 + 32z^3 - 16bbzz}}$; d'où il suit que l'axe GQ est un des diametres de la courbe.

2°. Après avoir partagé GR en deux parties égales au point B, si par ce même point

B on mene une droite DBC parallele à l'ordonnée principale GL, cette droite coupera en deux parties égales toutes les droites, comme Mm, menées parallelement à l'axe GQ, & terminées de part & d'autre par la courbe; Ensorte que cette droite BD sera l'autre diametre de la courbe $GaRMDLGARNC\delta G$.

3°. Si l'on prend sur le diametre BD, de part & d'autre du point B, les points A & a, tels que BA & Ba soient l'une & l'autre $= \frac{1}{2}\sqrt{aa-\sqrt{a^4-b^4}}$, & ensuite les points D & C, tels que BD & BC soient l'une & l'autre $= \frac{1}{2}\sqrt{aa-\sqrt{a^4-b^4}}$, les points A, a, & les points D & C, seront ceux où le diametre BD, prolongé de part & d'autre du point B, sera coupé par la courbe $GaRMDLGARC\delta G$ parallelement à son axe GQ; Ensorte que les tangentes aux points A, a, D, C, seront paralleles à l'axe GQ.

4°. Si on prend sur l'ordonnée principale GL, de part & d'autre du point G, les parties GL, GH, l'une & l'autre $= \frac{a}{\sqrt{2}}$, & sur la droite Rf, qui est parallele à GL, aussi de part & d'autre du point R, les parties Rf, RF, l'une & l'autre $= \frac{a}{\sqrt{2}}$: les points L & H seront ceux où la courbe coupe l'ordonnée principale parallelement à l'axe GQ, & les points f & F seront ceux où cette même courbe coupe Rf parallelement à l'axe; Ensorte que

que les tangentes aux points L, H, f, F, font toujours paralleles à l'axe GQ.

5°. Si on prend fur le diametre BD, de part & d'autre du point B, les parties Be, BE, l'une & l'autre $= \frac{1}{2} a$: fi par les points e & E on mene parallelement à l'axe GQ les droites $\zeta e \gamma$, $\phi E \delta$, fur lefquelles on prenne, de part & d'autre des points e & E, les parties $e\zeta$, $e\gamma$, $E\phi$, $E\delta$, chacune égales à $\frac{1}{2}\sqrt{bb+aa}$, les points ζ, γ, feront ceux où la droite $\zeta e \gamma$ eft coupée par la courbe $G a R M D L G A R N C \delta G$ parallelement à l'ordonnée principale GL, & les points ϕ & δ ceux où la droite $\phi E \delta$ eft coupée par la même courbe $G a R M D$, &c. parallelement à la même ordonnée principale GL, enforte que les tangentes aux points ζ, γ, ϕ, δ, font paralleles à l'ordonnée principale GL.

6°. Toutes les droites menées parallelement aux ordonnées QM, au-delà des tangentes ζT, γt, par rapport au point e, ne rencontreront jamais la courbe $G a R M D L G A R N C \delta G$: mais comme BR ($\frac{1}{2} b$) eft toujours moindre que $E\phi$ ou $e\zeta$ ($\frac{1}{2}\sqrt{bb+aa}$) il fuit de tout ce qu'on a remarqué, que $\phi\delta$ ou fon égale $\zeta\gamma$ $= \sqrt{bb+aa}$ font les *maxima* de la courbe par rapport à fon axe.

7°. Toutes les droites menées parallelement à l'axe GQ, au-delà des points L & H, ne rencontreront jamais la courbe $G a R M D L G A R N C \delta G$, enforte que les points L & H feront les limites de la courbe par rapport à fon ordonnée principale GL.

 8°. Il

8°. Il suit des deux dernieres remarques, que la courbe *GaRMDLGARNCδG* rentre en elle-même.

9°. Il est aisé de s'appercevoir que *BD* ou son égale $BC(\frac{1}{2}\sqrt{aa+\sqrt{a^4-b^4}})$ est toujours plus petit que *RF* ou $GL = \frac{a}{\sqrt{2}}$ & que *Rf* ou $GH = \frac{a}{\sqrt{2}}$; Ainsi la courbe, en allant de *F* en *D*, ou de *f* en *C*, s'est rapprochée de son axe, & en allant de *D* en *L*, ou de *C* en *H*, elle s'en est éloignée; De même on voit que la courbe, en allant de *A* en *R*, & de *R* en *φ*, s'éloigne toujours de son diametre *DC*, parce que $BR(\frac{1}{2}b) < E\varphi(\frac{1}{2}\sqrt{bb+aa})$; mais que cette même courbe, en allant de *φ* en *C*, se rapproche toujours de ce même diametre *DC*, & ensuite s'en éloigne, en allant de *C* en *δ*, puis s'en rapproche, en allant de *δ* en *G* & en *A*: ce que je dis ici de la portion *ARφCδGA*, doit s'entendre aussi de la portion a *RϬDγG*a.

10°. Enfin de tout ce qu'on a dit dans cet Article, il est visible que la courbe *GaRMDLGARNCδG* forme deux especes de cœurs, *ARφCδGA* & a *RϬDγG*a, qui se nouent ensemble aux points *G* & *R*. Ce qui m'engage à lui donner le nom de *Dicardie*.

AVERTISSEMENT.

Il y auroit encore bien des choses à remarquer au sujet de cette Dicardie; *mais comme ce n'est pas ici le lieu de traiter des differentes proprietés des Courbes qui composent le quatrieme ordre, puisqu'il ne s'agit encore que des points doubles, je vais continuer les principes généraux.*

SCHO-

SCHOLIE I.

LXXXI. Soit l'Equation générale pour toutes les lignes du 4me ordre, dont on a parlé dans l'Art. 31 du premier Mémoire, dans laquelle z exprime les abſciſſes, & u les ordonnées de toutes ces courbes.

$$(4D) \ldots \Delta u^4 + \overline{qz + A} \times u^3 + \overline{\beta z^2 + \gamma z + \delta} \times u^2 + \overline{\varepsilon z^3 + \eta z^2 + \lambda z + \mu} \times u + \overline{\nu z^4 + \rho z^3 + \varphi z^2 + \pi z + \sigma} = 0.$$

Si cette Equation eſt telle, 1°. Que les quatre racines du dernier membre égalé à zero ($\nu z^4 + \rho z^3 + \varphi z^2 + \pi z + \sigma = 0$) étant réelles, deux de ces racines ſoient égales entre elles, & les deux autres auſſi égales entre elles. 2°. Si le pénultieme membre eſt nul, ou bien ſi les trois racines de ce pénultieme membre, auſſi égalé à zero ($\varepsilon z^3 + \eta z^2 + \lambda z + \mu = 0$) étant réelles, deux de ces racines ſont des diviſeurs exacts du dernier membre; Toutes les courbes, dont la nature ſera exprimée par une telle Equation, auront deux points doubles ſur leur axe. Telles ſont, par exemple, toutes les courbes dont la nature peut être exprimée par l'Equation ſuivante,

$$\Delta u^4 + \overline{qz + A} \times u^3 + \overline{\beta z^2 + \gamma z + \delta} \times u^2 + \overline{z^3 + 7Bz^2 + 14BBz + 8B^3} \times u + \overline{z^4 + 6Bz^3 + 13B^2z^2 + 12B^3z + 4B^4} = 0,$$

parce que 1°. le dernier membre égalé à zero ($z^4 + 6Bz^3 + 13B^2z^2 + 12B^3z +$

$4B^4=0$) a quatre racines réelles, $z=-B$, $z=-B$, $z=-2B$ & $z=-2B$, dont les deux premieres égales sont entre elles & de mêmes signes, & les deux dernieres sont aussi égales entre elles & de mêmes signes. 2°. Parce que dans cette même Equation le pénultieme membre ($z^3+7Bz^2+14B^2z+8B^3=0$) aussi égalé à zero, a trois racines réelles, $z=-B$, $z=-2B$ & $z=-4B$, dont les deux premieres sont des diviseurs exacts du dernier membre ($z^4+6Bz^3+13B^2z^2+12B^3z+4B^4$). Ceci n'étant qu'une suite nécessaire de ce qui a été démontré dans les Articles précédens, il est inutile de s'y arrêter davantage *.

SCHOLIE II.

LXXXII. Si l'Equation générale marquée (4 D) † a toutes les conditions requises par l'Article précédent, & outre cela si les coëfficiens δ, μ & π de cette Equation sont tels que (g étant une grandeur positive ou négative déterminée par l'Equation) l'on ait

$$\delta=2Ag-3\Delta g^2+\frac{\sigma}{gg},\ \mu=Agg-2\Delta g^3+\frac{2\sigma}{g}\ \&\ \pi=\lambda g-\nu g^2+qg^3;$$

Toutes les courbes, dont la nature sera exprimée par l'Equation marquée par (4 D) ‡, auront trois points doubles: savoir, deux sur leur axe, à cau-

* Voyez l'Art. 51. du premier Mémoire.
† Art. précéd.   ‡ Art. précéd.

cause des conditions de l'Article précédent, & un troisieme sur leur ordonnée principale en un point B, distant de l'origine G des indéterminées de la grandeur $GB = -g$. Ceci n'est encore qu'une suite évidente des principes qu'on a établis jusqu'ici *.

COROLLAIRE.

LXXXIII. Donc les lignes du 4me ordre peuvent avoir trois points doubles, & il est aisé, en suivant les règles qui ont été données dans les Art. 63 & 72, de connoitre la nature de ce troisieme point double: c'est-à-dire, de connoitre s'il est ou un point d'intersection de deux branches, ou un point de rebroussement, ou une ovale infiniment petite conjuguée.

EXEMPLE I.

LXXXIV. Soit la courbe $MRBKEVCR\varphi BVm$ † telle que le rapport des abscisses GQ (z) aux ordonnées QM (u) soit exprimé par l'Equation suivante:

$$2bu^3 + 3b^2u^2 - z^4 + 2b^2z^2 - b^4 = 0,$$

Puisque le dernier membre égalé à zero $(z^4 - 2b^2z^2 + b^4 = 0)$ a quatre racines réelles, $z = -b$, $z = -b$, $z = b$ & $z = b$, dont les deux premieres sont égales entre elles & de mêmes signes, & les deux dernieres aussi égales entre elles & de mêmes signes: puisque le pénultieme membre $(\iota z^3 + \nu z^2 + \lambda z + \mu)$ est

* *Art. 51. du prem. Mémoire.* † *Fig. 48.*

eſt nul, il eſt clair * que cette courbe a deux points doubles ſur ſon axe GQ, dont le 1[er] eſt diſtant de G, origine des abſciſſes & des ordonnées de la grandeur $GR = b$, & le 2[d] diſtant de G de la grandeur $GV = -b$. *Ce qu'il falloit faire voir en premier lieu par cet Exemple.*

Mais outre cela cette courbe (par l'Art. 82.) a un 3[me] point double ſur ſon ordonnée principale en un point B diſtant de G (origine des indéterminées) de la grandeur $GB = -g = -b$. Car après avoir comparé les termes de cette Equation particuliere avec ceux de l'Equation générale marquée (4 D) dans l'Art 81, on a $\Delta = 0$, $q = 0$, $A = 2b$, $\mathcal{C} = 0$, $\gamma = 0$, $\iota = 0$, $\eta = 0$, $\lambda = 0$, $\nu = -1$, $\rho = 0$, $\varphi = 2bb$, $\sigma = -b^4$; & enſuite $\delta = 3bb$, $\mu = 0$, & $\pi = 0$. D'où il ſuit que les coëfficiens δ, μ & π ſont tels qu'il eſt requis par l'Art. 82, c'eſt-à-dire, qu'ils ſont $\pi = \lambda g - \gamma g^2 + q g^3$,

$$\mu = Agg - 2\Delta g^3 + \frac{2\sigma}{g}, \text{ \& } \delta = 2Ag - 3\Delta g^2 + \frac{\sigma}{gg}$$

: car 1°. il eſt viſible que $\pi = \lambda g - \gamma g^2 + q g^3$, puiſque la comparaiſon des termes a donné $\lambda = 0$, $\gamma = 0$, & $q = 0$; 2°. puiſque cette même comparaiſon des termes a donné $\mu = 0$, il eſt viſible que la ſuppoſition de μ égal à $Ag^2 - 2\Delta g^3 + \frac{2\sigma}{g}$, donne $Ag^2 - 2\Delta g^3 + \frac{2\sigma}{g} = 0$, & qu'en ſubſtituant dans cette for-

* Art. 81.

formule, au-lieu de A, Δ & σ, leurs valeurs déja trouvées, il vient $2bg^2 - \frac{2b^4}{g} = 0$, d'où l'on tire $g = b$. 3°. Il n'est pas moins évident, qu'en subst'ituant dans la formule ($2Ag - 3\Delta g^2 + \frac{\sigma}{gg}$), ou, ce qui est la même chose, dans la formule ($4bg - \frac{b^4}{gg}$) au-lieu de l'inconnue (g) sa valeur (b) qui vient d'être trouvée: il est, dis-je, évident que cette grandeur devient $= 3bb$, qui est précisément la valeur qu'on a trouvée par la comparaison des termes pour le coëfficient δ, ensorte que ce coëfficient δ est, dans cet exemple, $= 2Ag - 3\Delta g^2 + \frac{\sigma}{gg}$. Donc les trois coëfficiens δ, μ & π, ont dans l'Equation $2bu^3 + 3bbu^2 - z^4 + 2b^2z^2 - b^4 = 0$, les conditions requises par l'Art. 82. Donc cette Equation exprime la nature d'une courbe, qui (outre les deux points doubles qu'elle a sur son axe par l'Art. 81.) en a encore un troisieme sur son ordonnée principale GL en un point B distant de G, origine des indéterminées, de la grandeur $GB = -g = -b$. *Ce qu'il falloit faire voir en second lieu par cet Exemple.*

Maintenant pour connoitre la nature de ces trois points doubles, on differentiera deux fois son Equation, & l'on aura, après la seconde differentiation, $\frac{du}{dz} = \pm \sqrt{\frac{6z^2 - 2b^2}{6bu + 3b^2}}$.

Donc

Donc au point double R, ou [a] $z = b$, & $u = 0$, on a $\frac{du}{dz} = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$. Donc ce point double R est une interfection de deux branches. De même au point double V, où [b] $z = -b$, & $u = 0$, on a $\frac{du}{dz} = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$. D'où il fuit [c] que ce point double eft encore une interfection de deux branches. Enfin au troifieme point double B, où [d] $z = 0$, & $u = -b$, on a $\frac{du}{dz} = \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Donc [e] ce troifieme point double eft encore une interfection de deux branches. Ainfi avant de fuppofer la courbe décrite fur le plan, on connoit, par le moyen de fon Equation, non-feulement qu'elle a trois points doubles, mais encore que ces trois points doubles font trois points d'interfection. *Ce qu'il falloit faire voir en troifieme lieu par cet Exemple.*

REMARQUES.

LXXXV. On remarquera 1°. que l'ordonnée principale GL eft toujours le diametre de la courbe, puifque l'on a $z = \pm \sqrt{bb \pm u\sqrt{2bu + 3bb}}$.

2°. Si l'on prend fur cette ordonnée principale, du côté où les (u) font pofitifs, le point C, tel que GC foit $= \frac{1}{2}b$, le point C fera

a *Par la premiere partie de cet Article.* b *Idem.*
c *Art. 63.* d *Par la feconde part. de cet Art.*
e *Art. 63.*

ſera celui où la courbe rencontrera l'ordonnée principale parallelement à l'axe GQ.

3°. Si par le point double B on tire parallelement à l'axe une droite EBF, & ſi l'on prend ſur cette droite, de part & d'autre du point B, les points E & F, tels que BE ou BF ſoient l'une & l'autre $= b\sqrt{2}$: ces points E & F ſeront les points de la courbe où les tangentes deviennent paralleles à l'ordonnée principale GL.

4°. En prenant ſur l'ordonnée principale GL, du côté où les (x) ſont négatifs, le point A tel que BA ſoit $= \frac{1}{2}b$: ſi par ce point A, on mene parallelement à l'axe une droite $KA\varphi$, & ſi l'on prend ſur cette droite, de part & d'autre du point A, les points K & φ, tels que KA & $A\varphi$ ſoient l'une & l'autre $= b$: les points K & φ ſont ceux où cette droite $KA\varphi$ touche la courbe $MRBKLVCR\varphi BVm$.

5°. Toutes les droites, menées parallelement à l'ordonnée principale entre les points E & F, rencontrent la courbe en trois points. Mais celles qui ſont menées, parallelement à l'ordonnée principale, au-delà des points E & F, par rapport au point B, ne rencontrent la courbe qu'en un point. D'où il ſuit 1°. Que cette courbe a deux branches qui s'étendent à l'infini du même côté par rapport à l'axe, & de part & d'autre de l'ordonnée principale GL. 2°. Que les portions de cette courbe qui ſe nouent avec les branches infinies, aux points doubles R, B, V, ne s'étendent pas au-delà des points E & F le long de l'axe GQ.

6°. Toutes les droites, menées parallelement

ment à l'axe *GQ* entre les points *C* & *A*, rencontrent la courbe en quatre points. Mais celles qui ſont menées parallelement à l'axe au-delà du point *C*, par rapport au point *G*, ne rencontrent la courbe qu'en deux points, & celles qui ſont menées parallelement à l'axe au-delà du point *A*, par rapport au point *G*, ne rencontrent pas la courbe. D'où il ſuit, 1°. que cette courbe ne s'étend pas au-delà du point *A*, du côté où les (u) ſont négatifs, & que les points *K* & ϕ ſont ſes limites de ce côté-là: 2°. Que les portions de cette courbe, qui ſe nouent avec les branches infinies aux points doubles *R*, *B*, *V*, ne s'étendent pas au-delà du point *C* le long de l'ordonnée principale *GL*.

7°. De tout ce qui vient d'être dit, il eſt aiſé de voir que la courbe *MRBKEVCR*ϕ*BVm* eſt compoſée de deux branches infinies qui ſe nouent aux trois points *R*, *B*, *V*, en formant une eſpece de Las-d'amour, ce qui pourroit lui faire donner le nom de *Parabole Lemniſcerotique*.

EXEMPLE II.

LXXXVI. Soit la courbe *ERBμfVAe*ξ *BVF*ϕ*H*π*E**, dont la nature eſt exprimée par

$$u^4 - \frac{4}{3}bu^3 - 4b^2u^2 + z^4 - \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}}b^2z^2 + \frac{5}{3}b^4 = 0.$$

Je dis que cette courbe a trois points doubles, *R*, *V*, *B*, qui ſont trois points d'interſection. 1°. Il eſt viſible † qu'elle a deux points

* Fig. 49. † Art. 81.

points doubles sur son axe, puisque le dernier membre de cette Equation égalé à zero ($z^4 - \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}} b^2 z^2 + \frac{1}{3} b^4 = 0$) a quatre racines réelles, $z = \frac{b\sqrt{\sqrt{5}}}{\sqrt{\sqrt{3}}}$, $z = \frac{b\sqrt{\sqrt{5}}}{\sqrt{\sqrt{3}}}$, $z = -\frac{b\sqrt{\sqrt{5}}}{\sqrt{\sqrt{3}}}$ & $z = -\frac{b\sqrt{\sqrt{5}}}{\sqrt{\sqrt{3}}}$, dont les deux premieres sont égales & de mêmes signes, & les deux dernieres aussi égales entre elles & de mêmes signes, & enfin parce que le pénultieme membre ($\overline{\iota z^3 + \eta z^2 + \lambda z + \mu \times u}$) est nul. *Ce qu'il falloit faire voir en premier lieu par cet Exemple.*

2°. Il est visible * qu'elle a un troisieme point double sur son ordonnée principale *GL* en un point *b* distant de *G* (origine des indéterminées) de la grandeur $Gb = -g = -b$. Car en comparant l'Equation particuliere de cette courbe avec l'Equation générale marquée par (4*D*) dans l'Art. 81, on a $\Delta = 1$, $q = 0$, $A = -\frac{4}{3} b$, $\epsilon = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = -4bb$, $\iota = 0$, $\eta = 0$, $\lambda = 0$, $\mu = 0$, $\nu = 1$, $\rho = 0$, $\phi = -\frac{2b^3\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$, $\pi = 0$ & $\sigma = \frac{1}{3} b^4$, ce qui donne 1°. $\lambda g - \gamma g^2 + q g^3 = 0 = \pi$: & c'est une des trois conditions requises par l'Art. 82: 2°. L'on a aussi $(Agg - 2\Delta g^3 + \frac{2\sigma}{g})$, ou, ce qui est la même chose, $-\frac{4}{3} bgg - 2g^3 + \frac{10 b^4}{3g} = u = 0$,

* Art. 82.

$=0$, (puisque $\mu=0$), & cette seconde condition donne $g=b$; 3°. enfin cette valeur de g étant substituée dans la formule $2Ag-3\Delta g^2+\frac{\sigma}{gg}$, ou, ce qui est la même chose, dans son égale $-\frac{4}{3}bg-3g^2+\frac{5b^4}{3gg}$, il vient $(-4bb)$ qui est précisément la valeur trouvée, par la comparaison des termes, pour le coëfficient δ: d'où il suit que ce coëfficient δ est, dans cet exemple, $=2Ag-2\Delta g^2+\frac{\sigma}{gg}$. Donc les trois coëfficiens δ, μ & π, ont dans l'Equation $u^4-\frac{4}{3}bu^3-4b^2u^2+z^4-\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}}bbz^2+\frac{5}{3}b^4=0$, toutes les conditions requises par l'Article 82. Donc la courbe $ERB\mu fVA\varepsilon\xi BVF\varphi H\pi E$, dont la nature est exprimée par cette Equation, a trois points doubles R, V, B, les deux premieres sur son axe GQ en des points R & V distans de G (origine des indéterminées) des grandeurs $GR=b\sqrt{\frac{5}{3}}$ & $GV=-b\sqrt{\frac{5}{3}}$, & le troisieme sur son ordonnée principale GL, en un point B, distant du point G de la grandeur $GB=-b$. *Ce qu'il falloit faire voir en second lieu par cet Exemple.*

Pour connoitre la nature de ces trois points doubles, il faut * differentier deux fois l'Equation $u^4-\frac{4}{3}bu^3-4b^2u+z^4-\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}}bbz^2+\frac{5}{3}b^4=0$, & la seconde differentiation donnera

* *Art.* 52.

nera $\frac{du}{dz} = \pm \frac{\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} b^2 - 3x^2}}{\sqrt{3uu - 2bu - 2bb}}$. Enforte qu'au point double R, où [a] $u = 0$ & $z = b\sqrt[4]{\frac{5}{3}}$, on a $\frac{du}{dz} = \pm \sqrt[4]{\frac{5}{3}}$; d'où il fuit [b] que ce point double eft un point d'interfection de deux branches. De même au point double V, où [c] $u = 0$ & $z = -b\sqrt[4]{\frac{5}{3}}$, on a $\frac{du}{dz} = \pm \sqrt[4]{\frac{5}{3}}$; d'où il fuit que ce point double V [d] eft encore une interfection de deux branches. Enfin au point double B, où [e] $z = 0$ & $u = -b$, on a $\frac{du}{dz} = \pm \frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt{3\sqrt{3}}}$, ce qui fait voir [f] que ce point double B eft une troifieme interfection. Donc avant de fuppofer la courbe décrite fur le plan, on eft affuré non feulement qu'elle a trois points doubles, mais encore que ces trois points doubles font trois points d'interfection, & l'on connoit leurs pofitions, par rapport à l'axe & à l'ordonnée principale. *Ce qu'il falloit faire voir en 3me lieu par cet Exemple.*

REMARQUES.

LXXXVII. Je ne m'arrête point ici à conftrui-

a *Premiere partie de cet Article.* b *Art. 63.*
c *Premiere partie de cet Article.* d *Art. 63.*
e *Seconde partie de cet Article.* f *Art. 63.*

truire les tangentes de la courbe * $ERB\mu f$ $VA\epsilon\xi BVF$ aux-points doubles B, R, V, parce qu'il n'y a rien de ſi facile, dès le moment qu'on a les rapports, des ordonnées de la courbe, en ces points, aux ſoutangentes qui leur correſpondent. Mais pour donner quelque idée de cette courbe, je remarquerai,

1°. Que l'ordonnée principale GL eſt ſon diametre, puiſque l'on a toujours $z = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} bb \pm u\sqrt{4b^2 + \frac{4}{3}bu - uu}}$.

2°. Qu'en prenant ſur l'ordonnée principale GL, du côté où les (u) ſont poſitifs, les points A & H, tels que GA ſoit $= \frac{5}{3}b - \frac{1}{3}b\sqrt{10}$, & $GH = \frac{5}{3}b + \frac{1}{3}b\sqrt{10}$, on aura les points où la courbe coupe ſon ordonnée principale parallelement à ſon axe.

3°. En prenant ſur l'ordonnée principale GL la partie $GC = \frac{2}{3}b + \frac{2}{3}b\sqrt{10}$, & $GD = \frac{2}{3}b - \frac{2}{3}b\sqrt{10}$, ſi par les points C & D ainſi trouvés, on tire les droites $\varphi C \pi$, $\mu D \xi$, paralleles à l'axe GQ, ſur leſquelles on prenne, de part & d'autre des points C & D, les parties $C\varphi$, $C\pi$. & $D\mu$, $D\xi$, les unes & les autres $= b\sqrt[4]{\frac{5}{3}}$: les points ϕ, π, μ & ξ feront les quatre points, de la courbe, où les tangentes ſont paralleles à l'axe.

4°. Si par le point double B on mene, parallelement à l'axe GQ, une droite $fB\epsilon$, ſur laquelle on prenne, de part & d'autre du point

* Fig. 49.

point B, les parties Bf, Be, l'une & l'autre $\pm\frac{b\sqrt{2\sqrt{5}}}{\sqrt{\sqrt{3}}}$: les points f & e feront ceux où la courbe a des tangentes paralleles à l'ordonnée principale GL.

5°. Après avoir pris sur l'ordonnée principale GL, du côté où les (u) sont positifs, le point I, tel que GI soit $= 2b$: si l'on mene, par ce même point I, une droite EIF parallele à l'axe GQ, sur laquelle on prenne, de part & d'autre du point I, les portions IE, IF, l'une & l'autre $= \frac{b\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{32}}}{\sqrt{\sqrt{3}}}$: les points E & F feront deux autres points de la courbe, où les tangentes sont paralleles à l'ordonnée principale GL.

6°. Toutes les droites menées, parallelement à l'axe, au-delà des points C & D, par rapport au point G, ne rencontrent la courbe en aucun point; De même toutes les droites menées, parallelement à l'ordonnée principale, au-delà des points E & F, par rapport à cette ordonnée principale GL, ne rencontrent pas la courbe. D'où il suit que cette courbe ne s'étend pas au-delà des points φ & π, ni au-delà des points μ & ξ, le long de son ordonnée principale: & que, par rapport à son axe, elle ne s'étend pas au-delà des points E & F; Ensorte qu'elle est rentrante en elle-même.

7°. De-là il est aisé de conclure, que les droites $\varphi\mu$, $\pi\xi$, (l'une & l'autre, $=\frac{4}{3}b\sqrt{10}$) sont

font ses *maxima* paralleles à l'ordonnée principale, & la droite $EF = \frac{2b\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{32}}}{\sqrt{\sqrt{3}}}$, son *maximum* parallele à l'axe.

8°. On remarquera encore, que toutes les droites menées parallelement à l'axe, entre les points A & D, rencontrent la courbe en quatre points, aussi-bien que toutes les droites menées, parallelement à l'axe, entre les point H & C; Mais celles qui feroient menées, parallelement à ce même axe GQ, entre les points A & H, ne rencontreroient la courbe qu'en deux points.

9°. On remarquera aussi, que toutes les droites menées, parallelement à l'ordonnée principale GL, entre les points f & e, rencontrent toujours la courbe en quatre points: en comptant chaque point double R, B, V, pour deux points simples.

10°. De tout ce qui vient d'être dit, & de ce que $GH (\frac{5}{3}b + \frac{1}{3}b\sqrt{10}) \angle GC (\frac{2}{3}b + \frac{2}{3}b\sqrt{10})$, il est aisé de voir, 1°. Que la courbe en question représente, du côté où les (u) sont positifs, la figure d'un cœur $BE\varpi H\varphi FB$, dont la pointe est en B & le sommet du milieu en H; 2°. Que la distance, du sommet H aux sommets φ & ϖ, des oreillettes $H\varphi F$, $H\varpi E$, est $HC = \frac{1}{3}b\sqrt{10} - b$, & $C\varphi$ ou $C\varpi = \pm \frac{b\sqrt{\sqrt{5}}}{\sqrt{\sqrt{3}}}$.

11°. De ce que $GB (b) \angle GD (-\frac{2}{3}b + \frac{2}{3}b\sqrt{10})$ il est aisé de voir, 1°. Que cette même courbe

be forme une autre espece de cœur $A f \mu B \xi e A$, dont la base est en A, & le sommet en B: 2°. Que la distance de ce sommet B aux sommets μ & ξ, des oreilletes $B \mu f$, $B \xi e$, est $BD = \frac{2}{3} b \sqrt{10} - \frac{5}{3} b$, & $D\mu$ ou $D\xi = \pm b \sqrt[4]{\frac{5}{3}}$.

12°. Ensorte que cette courbe est composée de deux cœurs $B R E \varpi H \varphi F V B$, & $A R e B \mu f V A$, qui s'unissent au point double B, & se coupent, par leurs parties laterales, aux points R & V, ce qui lui procure les trois points doubles qui m'ont engagé de la donner ici pour exemple. On peut lui appliquer le nom de *Dicardie*, à cause des deux cœurs qu'elle représente: mais, pour la distinguer de celle dont il est parlé dans l'Art. 78, il est à propos de la nommer *seconde Dicardie*.

EXEMPLE III.

LXXXVIII. Soit la courbe $MERAVFmNRBVn$ *, dans laquelle le rapport des abscisses GQ (z) aux ordonnées QM (u) est exprimé par l'Equation suivante

$$u^4 - \frac{8b}{\sqrt{3\sqrt{3}}} u^3 + 2bbu^2\sqrt{3} - z^4 + 2b^2 z^2 - b^4 = 0.$$

Il est visible, 1°. que cette courbe a deux points doubles sur son axe GQ en des points R & V, distans de G, origine des abscisses & des ordonnées, des grandeurs $GR = b$, & $GV = -b$. Car outre que le dernier membre de cette Equation égalé à zero ($z^4 - 2b^2$

z

* Fig. 50.

$z^4 + b^4 = 0$) a quatre racines réelles $z = b$, $z = b$, $z = -b$ & $z = -b$, dont les deux premieres sont égales & de mêmes signes, & les deux dernieres aussi égales & de mêmes signes, il est clair que le pénultieme membre ($\iota z^3 + \kappa z^2 + \lambda z + \mu$) est nul : donc * cette courbe doit avoir deux points doubles sur son axe GQ. *Ce qu'il falloit faire voir en premier lieu.*

2°. Il n'est pas moins évident † qu'elle a un troisieme point double B sur son ordonnée principale GL. Car la comparaison des termes de l'Equation donnée, avec ceux de l'Equation générale marquée par ($4D$) dans l'Art. 81, donne $\Delta = 1$, $q = 0$, $A = -\frac{8b}{\sqrt{3\sqrt{3}}}$, $\zeta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 2bb\sqrt{3}$, $\epsilon = 0$, $\kappa = 0$, $\lambda = 0$, $\mu = 0$, $\nu = -1$, $\rho = 0$, $\phi = 2bb$, $\pi = 0$, & $\sigma = -b^4$. Cela posé, il est visible, 1°. Que $\lambda g - \gamma g^2 + qg^3 = \pi = 0$, ce qui est déja une des conditions de l'Art. 82. 2°. Outre cela $Agg - 2\Delta g^3 + \frac{2\sigma}{g}$, ou, ce qui est la même chose ($-\frac{8bg^2}{\sqrt{3\sqrt{3}}} - 2g^3 - \frac{2b^4}{g}$) étant égale à μ, on a $\frac{8bg^2}{\sqrt{3\sqrt{3}}} + 2g^3 + \frac{2b^4}{g} = 0$, ou $g^4 + \frac{4bg^3}{\sqrt{3\sqrt{3}}} + b^4 = 0$, d'où l'on tire $g = -b\sqrt{3}$:

3°. Cette

* Art. 81. † Art. 82.

3°. Cette valeur de g étant subſtituée, dans la formule $(2Ag - 3\Delta g^2 + \frac{c}{gg})$, ou, ce qui eſt la même choſe, dans ſon égale $(-\frac{16b}{\sqrt{3\sqrt{3}}}g - 3g^2 - \frac{b^4}{gg})$ il vient $(2bb\sqrt{3})$ qui eſt préciſément la valeur trouvée, par la comparaiſon des termes, pour le coëfficient δ: D'où il ſuit que l'Equation donnée $u^4 - \frac{8b}{\sqrt{3\sqrt{3}}}u^3 + 2bbu^3\sqrt{3} - z^4 + 2b^2z^2 - b^4 = 0$, a toutes les conditions requiſes, par l'Art. 82, pour exprimer la nature d'une ligne du 4me ordre qui ait trois points doubles, deux ſur ſon axe en des points R & V, diſtans de G (origine des abſciſſes) de la grandeur $GR = b$ & $GV = -b$, & un troiſieme ſur ſon ordonnée principale GL, en un point B, diſtant de G de la grandeur $GB = -g = b\sqrt{3}$. *Ce qu'il falloit faire voir en ſecond lieu.*

3°. Pour connoitre la nature des trois points doubles de cette courbe, il faut * differentier deux fois ſon Equation; la 2de differentiation donnera $\frac{du}{dz} = \pm \frac{\sqrt{bb - 3zz}}{\sqrt{4bu\sqrt{3} - 3u^2 - bb\sqrt{3}}}$.

Enſorte qu'au point double R, où (par la premiere partie de cet Article) $u = 0$, & $z = b$, on a $\frac{du}{dz} = \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{3}}}$: ce qui fait voir † que ce

* Art. 52. † Art. 63.

ce point double *R* eſt un point d'interſection. De même au point double *V*, où (par la premiere partie de cet Article) $u=o$ & $z=-b$, on a $\frac{du}{dz} = \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{3}}}$: ce qui fait voir * que ce point double *V* eſt encore un point d'interſection. Enfin au point double *B*, où (par la ſeconde partie de cet article) $z=o$ & $u=b\sqrt{3}$, on a $\frac{du}{dz} = \pm \frac{b}{o} = \frac{b}{o}$: ce qui fait voir † que les deux tangentes au point double *B* ſe confondent en une & avec l'ordonnée principale *GL*, & par conſéquent que ce point double *B* eſt un point de rebrouſſement auquel l'ordonnée principale *GL* eſt tangente. Donc avant de ſuppoſer la courbe décrite ſur le plan, on connoît non-ſeulement qu'elle a trois points doubles, mais encore quelle eſt la nature de ces trois points doubles. *Ce qu'il falloit voir en 3me lieu par cet Exemple.*

REMARQUES.

LXXXIX. On peut remarquer ici, 1°. Que l'ordonnée principale *GL* eſt le diametre de la courbe *MERAVFmNRBVn*, puiſque l'on a toujours $z = \pm$

$$\sqrt{bb \pm u\sqrt{uu - \frac{8b}{\sqrt{3}\sqrt{3}}u + 2bb\sqrt{3}}}.$$

2°. Si l'on prend ſur l'ordonnée principale *GL*,

* Art. id. † Art. id.

GL, du côté où les (u) sont négatifs, le point A, tel que GA soit $= \frac{b}{\sqrt{3\sqrt{3}}}$ ce point A sera le point de la courbe où la tangente devient parallele à l'axe.

3°. Si, par le point de rebroussement B, on mene, parallelement à l'axe GQ, une droite EBF: si l'on prend sur cette droite, de part & d'autre du point B, les parties BE, BF, l'une & l'autre $= b\sqrt{2}$: les points E & F seront deux points d'inflexion de la courbe, dont les tangentes seront paralleles à l'ordonnée principale GL.

4°. Toutes les droites menées, parallelement à l'axe, entre les points A & B, rencontrent la courbe en quatre points; Mais les droites menées, parallelement à ce même axe GQ, au-delà des points A & B, par rapport au point G, ne rencontrent la courbe qu'en deux points, & la rencontrent toujours en deux points, à quelque distance qu'elles soient des points A & B, soit du côté des (u) négatifs, soit du côté des (u) positifs.

5°. Toutes les droites, menées parallelement à l'ordonnée principale GL, entre les points B & E, ou entre les points B & F, ou au-delà des points E & F, par rapport au point B, ne rencontrent jamais la courbe qu'en deux points M & N, dont il y en a toujours un du côté des (u) positifs, & un du côté des (u) négatifs.

6o. De tout ce qu'on a remarqué jusqu'ici, il est aisé de comprendre, 1°. Que la cour-

be *MERAVFmNRBVn* eſt compoſée de quatre branches infinies *AREM*, *AVFm*, *BRN*, *BVn*, dont les deux premieres *AREM*, *AVFm*, s'étendent à l'infini au-deſſus de l'axe *GQ*, c'eſt-à-dire, du côté où les (*u*) ſont poſitifs, & les deux dernieres au-deſſous de cet axe, du côté où les (*u*) ſont négatifs. 2°. Que les deux premieres branches *AREM*, *AVFm* s'uniſſent en *A*, ſommet d'une ſinuoſité dont la tangente eſt parallele à l'axe. 3°. Que les deux dernieres branches *NRB*, *nVB* s'uniſſent en *B* par un point de rebrouſſement, dont la tangente ſe confond avec l'ordonnée principale. 4°. Que la premiere & troiſieme branche *ARFM*, *NRB*, ſe coupent, ſur l'axe *GQ*, en un point *R*, où elles forment par conſéquent un point d'interſection. 5°. Que la ſeconde branche *AVFm* coupe la quatrieme branche *nVB*, ſur l'axe *GQ*, en un point *V*, où il ſe trouve par conſéquent un ſecond point d'interſection. 6°. Que les deux premieres branches *AREM*, *AVFm*, ont chacune un point d'inflexion, l'une en *E*, l'autre en *F*; D'où il ſuit, que ces deux branches, après avoir été concaves vers leur ordonnée principale *GL*, de *A* en *E*, & de *A* en *F*, deviennent enſuite, l'une & l'autre, convexes vers cette même ordonnée principale *GL*. 7°. Enfin il eſt aiſé de comprendre que les deux dernieres branches *BRN*, *BVn*, ſont toujours convexes vers leur ordonnée principale *GL*.

PRO-

PROPOSITION VII.

PROBLEME.

XC. *Une ligne du 4me ordre étant donnée, trouver si elle a des points doubles; Ou, ce qui est la même chose, l'Equation algébrique d'une ligne du 4me ordre étant donnée, connoitre si cette Equation exprime la nature d'une courbe qui ait des points doubles, & trouver les valeurs des abscisses & des ordonnées, de la courbe en question, correspondantes à ces points doubles.*

SOLUTION.

Soit donnée l'Equation générale pour toutes les lignes du 4me ordre, dont on a parlé dans le premier Mémoire & dans l'Art. 81 de celui-ci. Elle est désignée ici par (4*D*).

$$(4D)\ldots \Delta u^4 \left.\begin{matrix} +qz \\ +\kappa \end{matrix}\right\} u^3 \left.\begin{matrix} +\epsilon z^2 \\ +\gamma z \\ +\delta \end{matrix}\right\} u^2 \left.\begin{matrix} +\varepsilon z^3 \\ +\eta z^2 \\ +\lambda z \\ +\mu \end{matrix}\right\} u \left.\begin{matrix} +\nu z^4 \\ +\rho z^3 \\ +\varphi z^2 \\ +\varpi z \\ +\sigma \end{matrix}\right\} = 0.$$

Après avoir differentié cette Equation, on aura le rapport des (dz) aux (du) exprimé par la fraction marquée ici par (F) (B)

$$(F) \ldots \frac{du}{dz} = \frac{-qu^3 - \overline{2\beta z + \gamma} \times u^2 - \overline{3\epsilon z^2 + 2\eta z + \lambda} \times u - 4\nu z^3 - 3\rho z^2 - 2\phi z - \pi}{4\Delta u^3 + \overline{3qz + 3\alpha} \times u^2 + \overline{2\beta z^2 + 2\gamma z + 2\delta} \times u + \epsilon z^3 + \eta z^2 + \lambda z + \mu}$$

dont le numérateur & le dénominateur s'évanoüiſſent par-tout où il y a des points doubles.

Soient de plus les Equations ſuivantes marquées par (A) & par (B), qui ne different, la premiere du numérateur de la fraction (F) égalé à zero, la ſeconde du dénominateur de la même fraction, auſſi égalé à zero, qu'en ce que l'indéterminée (y) s'y trouve au-lieu de l'indéterminée (u). Ces deux Equations ſe rapportent à deux courbes, que je nomme *Auxiliaires*.

$$(A) \ldots\ldots qy^3 \left.\begin{matrix} +2\beta z \\ +\gamma \end{matrix}\right\} y^2 \left.\begin{matrix} +3\epsilon z^2 \\ +2\eta z \\ +\lambda \end{matrix}\right\} y \left.\begin{matrix} +4\nu z^3 \\ +3\rho z^2 \\ +2\phi z \\ +\pi \end{matrix}\right\} = 0.$$

$$(B)\ldots 4\Delta y^3 \left.\begin{matrix} +3qz \\ +3a \end{matrix}\right\} y^2 \left.\begin{matrix} +2\beta z^2 \\ +2\gamma z \\ +2\delta \end{matrix}\right\} y \left.\begin{matrix} +\varepsilon z^3 \\ +\eta z^2 \\ +\lambda z \\ +\mu \end{matrix}\right\} = 0.$$

L'Equation marquée par (A) exprime la nature d'une ligne qui n'excede jamais le 3me ordre, mais qui peut être au dessous, dont l'axe est celui de la courbe désignée par l'Equation ($4D$) & dont les abscisses sont communes à l'une & à l'autre courbe. L'Equation marquée par (B) exprime aussi la nature d'une ligne qui n'excede jamais le 3me ordre, dont l'axe est celui des courbes désignées par les Equations (A) & ($4D$), & dont les abscisses sont communes aux trois courbes.

Cela posé, il est constant 1°. que les courbes auxiliaires, désignées par les Equations (A) & (B) peuvent se rencontrer en differens points, & qu'aux points de rencontre, les ordonnées qui y aboutissent, sont communes & à la courbe désignée par l'Equation (A) & à la courbe désignée par l'Equation (B).

2°. Il n'est pas moins évident, qu'en substituant dans l'Equation (A), au-lieu de l'indéterminée (y), sa valeur (en z & en constante) prise de l'Equation (B), on aura une égalité dans laquelle il n'y aura plus d'autre indéterminée que (z), dont les racines réelles donneront les valeurs des abscisses, (communes à l'une & à l'autre courbe auxiliaire) correspondantes aux points de rencontre des deux courbes.

3°. En substituant ensuite dans l'Equation

(B), au-lieu de l'indéterminée (z), ses valeurs (en constantes) prises des racines réelles de l'égalité dont on vient de parler *, il est visible qu'on aura de nouvelles égalités, dans lesquelles il n'y aura d'autre indéterminée que (y), dont les racines réelles exprimeront les valeurs des ordonnées communes aux deux courbes auxiliaires, c'est-à-dire, les valeurs des ordonnées correspondantes aux points de rencontre de ces deux courbes.

Ainsi, on aura les valeurs des abscisses & des ordonnées, des courbes auxiliaires, aux points où ces deux courbes se rencontrent : ou, ce qui est la même chose, on aura les points de rencontre de ces deux courbes.

4°. Maintenant, si un ou plusieurs points de rencontre, des courbes désignées par les Equations (A) & (B), tombent sur la ligne du 4me ordre désignée par l'Equation ($4D$), je dis que les endroits de la ligne du 4me ordre, où tomberont les points de rencontre des courbes auxiliaires, seront autant de points doubles de cette ligne du 4me ordre. Car ces points étant alors communs aux trois lignes désignées par les Equations (A), (B), ($4D$), les ordonnées qui y correspondent seront communes aux trois courbes : Donc, dans ces cas, l'indéterminée (y), qui dans les Equations (A) & (B) désigne les ordonnées des deux courbes auxiliaires, sera égale à l'indéterminée (u) de l'Equation ($4D$), ou, ce qui est la même chose, à l'indéterminée (u) de la fraction marquée par (F). Or comme les Equations (A) & (B) s'évanouïssent

* No. 2 de cet article.

sent, lorsqu'on y substitue, au-lieu de (z) & de (y), leurs valeurs trouvées pour les points de rencontre des courbes auxiliaires (ce qui est évident par les premiers principes de l'Algebre): il est visible que les numérateur & dénominateur de la fraction (F) s'évanouissent dans tous les cas où u est $=y$; Et par conséquent que les points de rencontre des courbes auxiliaires, qui tombent sur la ligne du 4me ordre, y désignent autant de points doubles.

Donc, après avoir trouvé, de la maniere qu'on l'a expliqué ci-dessus *, les valeurs des abscisses & des ordonnées, des courbes auxiliaires désignées par les Equations (A) & (B), aux points où ces deux courbes se rencontrent: on substituera successivement dans l'Equation ($4D$), au-lieu de l'indéterminée (u), les differentes valeurs de l'indéterminée (y), & en même tems la valeur correspondante de l'indéterminée (z): si une ou plusieurs des substitutions font évanouïr tous les termes de l'Equation ($4D$), la ligne du 4me ordre, dont cette Equation exprime la nature, aura un ou plusieurs points doubles, & les valeurs des (y) & des (z) correspondans, qui, ayant été substituées, auront fait évanouïr tous les termes de l'Equation ($4D$), désigneront les ordonnées & les abscisses, de la ligne du 4me ordre, correspondantes aux points doubles de cette ligne. Ainsi on sera certain, non-seulement que la ligne donnée a des points doubles, mais encore on aura les valeurs des abscisses & des ordonnées qui correspondent à ces points dou-

 bles,

* N°. 2 & 3 de cet Article.

bles. *Ce qu'il falloit trouver en 1er lieu.*

Après avoir ſubſtitué ſucceſſivement, dans l'Equation (4 *D*), au-lieu de l'indéterminée (*u*) les valeurs trouvées de l'indéterminée (*y*), aux points de rencontre des deux courbes auxiliaires, & en même tems les valeurs correſpondantes de l'indéterminée (*z*), ſi aucune des ſubſtitutions n'a fait évanouïr tous les termes de l'Equation (4 *D*): où bien, ſi les deux courbes auxiliaires ne ſe rencontrent pas, ce qui peut arriver, c'eſt-à-dire, ſi la combinaiſon des Equations (*A*) & (*B*) ne donne que des racines imaginaires: la ligne du 4me ordre, dont la nature ſera exprimée par l'Equation (4 *D*), n'aura aucun point double. *Ce qu'il falloit trouver en ſecond lieu.*

EXEMPLE I.

XCI. On demande ſi la courbe, dont la nature eſt exprimée par l'Equation ſuivante marquée (4 *D*) a des points doubles.

$$(4D) \ldots aau^2 + \overline{az^2 + 3a^2z + 4a^3} \times u = z^4 + 6az^3 + 12a^2z^2 + 9a^3z + a^4$$

Après avoir differentié cette Equation, on a la fraction marquée ici par (*F*), d'où l'on tire les Equations marquées par

$$(F) \ldots \frac{du}{dz} = \frac{-\overline{2az + 3aa} \times u + 4z^3 + 18az^2 + 24a^2z + 9a^3}{2a^2u + az^2 + 3a^2z + 4a^3}.$$

(*A*) & par (*B*) qui ſont ici les Equations des courbes auxiliaires.

$$(A) \ldots ay = 2z^2 + 6az + 3a^2$$

$$(B) \ldots 2ay + z^2 + 3az + 4a^2 = 0$$

Ces

Ces deux Equations combinées ensemble donnent l'égalité $z^2 + 3az + 2a^2 = 0$, qui étant du 2^d degré, fait connoitre que les courbes auxiliaires (qui sont ici deux paraboles coniques) se rencontrent en deux points, auxquels correspondent les deux abscisses $z = -a$, & $z = -2a$, qui sont les deux racines de l'égalité $zz + 3az + 2aa = 0$: or à l'abscisse $z = -a$ correspond une ordonnée commune aux deux courbes auxiliaires, qui est $y = -a$; & à l'abscisse $z = -2a$ correspond une autre ordonnée commune aux deux courbes auxiliaires, qui est aussi $y = -a$.

Maintenant si l'on substitue, 1°. dans l'Equation donnée (4 *D*), au-lieu des indéterminées (z) & (u), les valeurs des (z) & des (y) du premier point de rencontre des deux courbes auxiliaires, c'est-à-dire ($-a$) au-lieu de (z), & ($-a$) au-lieu de (u), tous les termes de l'Equation (4 *D*) s'évanouïssent: ce qui fait voir * que le premier point d'intersection des paraboles auxiliaires tombe sur la ligne du 4me ordre, dont la nature est exprimée par l'Equation (4 *D*), & par conséquent qu'elle a un point double, auquel l'abscisse & l'ordonnée sont l'une & l'autre $= -a$.

2°. Si l'on substitue dans cette même Equation donnée (4 *D*), au-lieu des indéterminées (z) & (u) les valeurs des (z) & des (y) du second point de rencontre des deux courbes auxiliaires, c'est-à-dire ($-2a$) au-lieu de (z) & ($-a$) au-lieu de (u), tous les termes de l'Equation (4 *D*) s'évanouïssent; ce

* *Art. préced.*

ce qui fait voir * que la courbe propoſée a un ſecond point double, & qu'à ce ſecond point double l'abſciſſe eſt $=-2a$ & l'ordonnée $=-a$.

Ainſi avant de ſuppoſer la courbe décrite, on connoit par ſon Equation, non-ſeulement qu'elle a deux points doubles, mais encore les lieux où ces deux points doubles ſont ſitués par rapport à l'origine de ſes abſciſſes & de ſes ordonnées. *Ce qu'il falloit faire voir par cet Exemple.*

EXEMPLE II.

XCII. On demande ſi la courbe $A\varphi GEBFG\pi A$ †, dont on ſuppoſe ne connoitre encore que l'Equation marquée ici par $(4D)$, a un ou pluſieurs points doubles.

$$(4D)\ldots u^4 - 4bu^3 \left.\begin{matrix} +2zz \\ -4bz \\ +9bb \end{matrix}\right\} u^2 \left.\begin{matrix} -4bz^2 \\ +8b^2z \\ -10b^3 \end{matrix}\right\} u \left.\begin{matrix} +z^4 \\ -4bz^3 \\ +7b^2z^2 \\ -6b^3z \\ +4b^4 \end{matrix}\right\} = 0.$$

On trouve d'abord le rapport de (du) à (dz) exprimé par la faction (F).

$$(F)\ldots \frac{du}{dz} = -\frac{\left.\begin{matrix} +4z \\ -4b \end{matrix}\right\} u^2 \left.\begin{matrix} -8bz \\ +8bb \end{matrix}\right\} u \begin{matrix} +4z^3 & +14bbz \\ -12bz^2 & -6b^3 \end{matrix}}{4u^3 - 12bu^2 \left.\begin{matrix} +4z^2 \\ -8bz \\ +18b^2 \end{matrix}\right\} u \begin{matrix} -4bz^2 \\ +8b^2z \\ -10b^3 \end{matrix}}.$$

D'où il ſuit que les deux Equations auxiliaires

* *Art. préced.* † Fig. 53.

res ſont telles qu'on les voit repréſentées ici en (A) & en (B).

$$(A)\ldots\ldots\left\{\begin{matrix}+4z\\-4b\end{matrix}\right\}y^2\begin{matrix}-8bz\\+8bb\end{matrix}\Bigg\}y\begin{matrix}+4z^3\\-12bz^2\\+14b^2z\\-6b^3\end{matrix}\left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\}=0.$$

$$(B)\ldots 4y^3-12by^2\begin{matrix}+4z^2\\-8bz\\+18b^3\end{matrix}\Bigg\}y\begin{matrix}-4bz^2\\+8b_2z\\-10b^3\end{matrix}\Bigg\}=0.$$

Ces deux Equations ſont diviſibles, la premiere par $(4yy-8by+4zz-8bz+6bb)$, la ſeconde par $(4yy-8by+4zz-8bz+10bb)$: Ainſi elles ſe réduiſent, l'une à l'Equation $(2A)$, l'autre à l'Equation $(2B)$.

$(2A)\ldots z-b=0$, $(2B)\ldots y-b=0$,

La premiere des deux nouvelles Equations déſigne une ligne droite parallele à l'ordonnée principale, & diſtante de l'origine des (z) de la grandeur (b): la ſeconde déſigne auſſi une ligne droite parallèle à l'axe, & diſtante de cet axe de la grandeur (b); D'où il ſuit que les deux courbes auxiliaires, déſignées par les Equations (A) & (B), qui ſe ſont réduites à de ſimples lignes droites, ſe coupent en un point, diſtant de l'axe de la grandeur (b) & de l'origine de cet axe d'une grandeur auſſi $=b$: ce qui fait voir déja que la courbe donnée peut avoir un point double.

Maintenant, ſi l'on ſubſtitue, dans l'Equation $(4D)$, au-lieu de (z) & de (u), les valeurs (b) & (b), des indéterminées (z) & (y) au point de rencontre des deux lignes auxiliaires: cette ſubſtitution fera évanouïr tous les

les termes de l'Equation (4 *D*); D'où il suit que ce point de rencontre des lignes auxiliaires tombe sur la courbe donnée *AzGEBFGπA* en un point *G* distant de l'origine *O* de l'axe *OP* de la grandeur *OP* (*z*) = *b*, & de l'axe *OP* de la grandeur *PG* (*u*) = *b*, & par conséquent * qu'il y a là un point double.

Donc, avant de supposer la courbe décrite, on connoit non-seulement qu'elle a un point double en *G*, mais encore qu'elle ne sauroit en avoir d'autres. *Ce qu'il falloit faire voir par cet Exemple.*

REMARQUE.

XCIII. Il est bon de remarquer que la Solution du Problême précédent est, dans de certains cas particuliers, beaucoup plus courte & moins sujette à de longs calculs, qu'elle ne l'est dans le général. Quelquefois on n'a pas besoin d'avoir recours aux intersections des deux courbes auxiliaires, désignées par les Equations (*A*) & (*B*); c'est ce qui arrive lorsqu'il n'y a aucun mélange de variable, ni dans le numérateur, ni dans le dénominateur de la fraction marquée par (*F*): car alors la seule extraction des racines des deux égalités formées, l'une par le numérateur égalé à zero, l'autre par le dénominateur aussi égalé à zero, donne les valeurs des (*z*) & des (*u*), qui étant successivement substituées dans l'Equation de la courbe, font connoitre si la courbe a ou n'a pas de points doubles.

Par

* *Art.* 90.

Par exemple, on demande si la courbe, dont la nature est exprimée par l'Equation $u^4 - 2b^2u^2 - 2bz^3 + 3bbz^2 = 0$, a des points doubles. Après avoir differentié l'Equation, on a. $\frac{du}{dz} = \frac{3bz^2 - 3bbz}{2u^3 - 2bbu}$: d'où l'on tire les deux égalités suivantes $z^2 - bz = 0$, & $u^3 - b^2u = 0$; Les racines de la premiere égalité sont $z = 0$ & $z = b$, auxquelles correspondent les racines $u = 0$ & $u = \pm b$ de la 2de égalité.

Or, 1°. $z = 0$ & $u = 0$ étant substitués dans l'Equation proposée $u^4 - 2b^2u^2 - 2bz^3 + 3bbzz = 0$, tous les termes s'évanouïssent: ce qui fait voir que la courbe proposée a un point double à l'origine de son axe. 2°. Si l'on substitue dans cette même Equation, au-lieu de (z) & de (u), les valeurs $z = b$ & $u = \pm b$, tous les termes s'évanouïssent encore; D'où il suit que cette courbe a deux autres points doubles, de part & d'autre de son axe, distans de cet axe de la grandeur $u = \pm b$, & cela sur une ligne droite parallele aux ordonnées, distante de l'origine des abscisses de la grandeur $z = b$.

PRO-

PROPOSITION VIII.

PROBLEME.

XCIV. *Les points d'interſection d'une ligne du 4me ordre, dont on a l'Equation, étant donnés, déterminer ſi ce point d'interſection eſt un point double de la premiere, de la ſeconde, ou de la troiſieme eſpece.*

SOLUTION.

Soit la courbe $MGDGARCRm$ *, dont EP eſt l'axe; Le rapport des abſciſſes EP aux ordonnées PM étant donné par une Equation algébrique quelconque du quatrieme degré, ſoit G un des points doubles de cette courbe, trouvé par le moyen de l'Art. 90. Soit $G\Omega$ une droite parallele aux ordonnées PM, menée du point double G ſur l'axe EP; Soit ſuppoſé de plus qu'on a découvert, par l'Art. 63, que ce point double G eſt un point d'interſection. On demande ſi ce point d'interſection eſt de la premiere, ſeconde, ou troiſieme eſpece †.

Puiſque le point double G eſt donné de poſition, les droites $E\Omega$ & $G\Omega$ ſont données, ainſi on peut transporter l'origine des indéterminées de E en G, & par conſéquent prendre GQ pour l'abſciſſe, & QM pour l'ordonnée. D'où il ſuit qu'en nommant GQ (z) & QM (u), le rapport de GQ (z) à QM (u), ſera ex-

* Fig. 44. † Art. 15.

exprimé par une Equation algébrique qu'on pourra toujours rapporter à l'Équation générale de l'Art. 61, marquée ici par (10).

$$(10)\ldots \Delta u^4 + \overline{qz + \alpha}\, u^3 + \overline{\beta zz + \gamma z + \delta} \times uu + \overline{\varepsilon z^3 + \eta zz + \lambda z} \times u + \overline{\nu z^4 + \rho z^3 + \varphi zz} = 0.$$

Cela posé, par l'Art. 63, on menera les droites *GT*, *Gt*, tangentes de la courbe au point double *G*. Si l'une & l'autre de ces tangentes (*Fig.* 44.) rencontre la courbe chacune en un autre point *N* & *n*, le point double *G* n'est qu'un point double de la premiere espece *. Si l'une de ces tangentes *GT* peut rencontrer la courbe en un autre point *N*, tandis que l'autre tangente *Gt* ne sauroit la rencontrer en d'autre point qu'en *G* (*Fig.* 59.) alors le point double *G* est un point double de la seconde espece †. Enfin si la courbe n'est rencontrée, ni par la tangente *Gt*, ni par la tangente *GT* en d'autre point qu'au point double *G*, alors ⸸ ce point double *G* est de la troisieme espece.

Maintenant le rapport de (dz) à (du) au point double *G* étant ‡ exprimé par $\frac{du}{dz} = -\frac{\lambda}{2\delta} \pm \frac{1}{2\delta}\sqrt{\lambda\lambda - 4\delta\varphi}$, il est visible que les ordonnées *Qt* des tangentes *tGn*, *TGN*, sont $= -\frac{\lambda z}{2\delta} \pm \frac{z}{2\delta}\sqrt{\lambda\lambda - 4\delta\varphi}$. D'où il suit

* *Art.* 40. *N°.* 2. † *Art.* 41. *N°.* 1.
⸸ *Art. id.* ‡ *Art.* 61.

ſuit qu'aux points n & N où les tangentes tGn, TGN coupent la courbe $MGDGARCRm$, on a $n = -\frac{\lambda z}{2\delta} \pm \frac{z}{2\delta}\sqrt{\lambda\lambda - 4\delta\varphi}$, & cette double valeur de l'indéterminée (n) étant ſubſtituée dans l'Equation marquée par (10), il doit en réſulter deux égalités du quatrieme degré. Les racines de la premiere égalité donneront les points d'interſection de la tangente Gt & de la courbe $MGDGARCRm$, c'eſt-à-dire, les points G & n. Les racines de la ſeconde égalité donneront les points d'interſection de la tangente GT & de la même courbe $MGDGARCRm$, c'eſt-à-dire, les points G & N. Mais puiſque les droites Gt, GT, ſont tangentes de la courbe au point double G, origine des indéterminées (z), il eſt évident qu'il doit y avoir dans chaque égalité au moins trois racines égales à zero: puiſqu'en ce même point G il y a * une abſciſſe $GQ(z) = 0$, trois fois commune à la droite GT & à la même courbe $MGDGARCRm$.

En effet, la ſubſtitution de $-\frac{\lambda z}{2\delta} \pm \frac{z}{2\delta}\sqrt{\lambda\lambda - 4\delta\varphi}$, au-lieu de ſon égal ($n$) dans l'Equation marquée (10), donne les deux égalités qu'on voit ici marquées, l'une par (H) l'autre par ($2H$), dans chacune deſquelles il y a trois racines

(H)

* Art. 19.

$$(H)\ldots\left\{\begin{array}{l} \Delta\lambda^4 - 4\Delta\lambda^2\delta\phi - q\lambda^3\delta \\ 3q\lambda\delta^2\phi + \beta\lambda^2\delta^2 - \varepsilon\lambda\delta^3 \\ 2\Delta\delta^2\phi^2 - 2\beta\phi\delta^3 + 2\nu\delta^4 \\ \left.\begin{array}{l} 2\Delta\lambda\delta\phi - \Delta\lambda^3 \\ q\lambda^2\delta - q\delta^2\phi \\ \varepsilon\delta^3 - \beta\lambda\delta^2 \end{array}\right\}\sqrt{\lambda\lambda - 4\delta\phi} \end{array}\right\} z^4 - \left\{\begin{array}{l} \alpha\lambda^3\delta - 3\alpha\lambda\delta^2\phi \\ \eta\lambda\delta^3 - \gamma\lambda^2\delta^2 \\ 2\gamma\phi\delta^3 - 2\rho\delta^4 \\ \left.\begin{array}{l} -\alpha\lambda^2\delta \\ +\alpha\delta^2\phi \\ +\gamma\delta^2\lambda \\ -\eta\delta^3 \end{array}\right\}\sqrt{\lambda\lambda - 4\delta\phi} \end{array}\right\} z^3 = 0.$$

$$(2H)\ldots\left\{\begin{array}{l} \Delta\lambda^4 - 4\Delta\lambda^2\delta\phi - q\lambda^3\delta \\ 3q\lambda\delta^2\phi + \beta\lambda^2\delta^2 - \varepsilon\lambda\delta^3 \\ 2\Delta\delta^2\phi^2 - 2\beta\phi\delta^3 + 2\nu\delta^4 \\ \left.\begin{array}{l} \Delta\lambda^3 - 2\Delta\lambda\delta\phi \\ q\delta^2\phi - q\lambda^2\delta \\ \beta\lambda\delta^2 - \varepsilon\delta^3 \end{array}\right\}\sqrt{\lambda\lambda - 4\delta\phi} \end{array}\right\} z^4 - \left\{\begin{array}{l} \alpha\lambda^3\delta - 3\alpha\lambda\delta^2\phi \\ \eta\lambda\delta^3 - \gamma\lambda\lambda\delta^2 \\ 2\gamma\phi\delta^3 - 2\rho\delta^4 \\ \left.\begin{array}{l} +\alpha\lambda^2\delta \\ -\alpha\delta^2\phi \\ -\gamma\delta^2\lambda \\ +\eta\delta^3 \end{array}\right\}\sqrt{\lambda\lambda - 4\delta\phi} \end{array}\right\} z^3 = 0.$$

égales à zero, qui font pour le point G trois fois commun à chacune des droites Gt, GT, & à la courbe $MGDGARCRm$, & une quatrieme, qui eſt pour les points ſimples n & N où les tangentes Gt, GT, coupent la courbe $MGDGARCRm$.

Cela étant ainſi, il eſt viſible que ſi la 4me racine de l'égalité (H), & la 4me ra-

racine de l'égalité marquée par ($2H$) ſont autres que zero (ſoit qu'elles ſoient poſitives, ſoit qu'elles ſoient négatives): il eſt viſible, dis-je, que les tangentes Gt, GT au point double G ſeront l'une & l'autre ſécantes de la courbe en des points comme n & N, & par conſéquent que le point double G ne ſera qu'un point double de la premiere eſpece.

Mais ſi la 4me racine d'une des égalités comme (H) eſt égale à zero, tandis que la 4me racine de l'autre égalité ($2H$) eſt autre que zero (ſoit qu'elle ſoit poſitive, ſoit qu'elle ſoit négative): il eſt viſible que le point n ſe confond avec le point double G, tandis que le point N ne s'y confond pas. Enforte que la branche $DGMn$ a une inflexion en G, pendant que la branche DGA n'en a point en cet endroit, ce qui fait en G un point double de la ſeconde eſpece*.

Enfin ſi les quatriemes racines des deux égalités (H) & ($2H$) ſont égales à zero, il eſt viſible que non-ſeulement le point n, mais encore le point N ſe confond avec le point double G, enforte que la branche DGA a une inflexion en G, auſſi-bien que la branche $DGMn$, ce qui fait en G un point double † de la troiſieme eſpece.

Donc par le moyen des deux égalités précédentes, marquées par (H) & ($2H$) on déterminera toujours ſi le point double G eſt de la premiere, ſeconde ou troiſieme eſpece. *Ce qu'il falloit trouver.*

EXEM-

* *Art.* 15. & 21. N°. 2. † *Art. id.*

EXEMPLE I.

XCV. Soit la courbe* *MGDGARCRm*, dans laquelle le rapport des abſciſſes *GQ* (z) aux ordonnées *QM* (u) eſt exprimé par $bu^3 + b^2u^2 - z^4 - 2bz^3\sqrt{2} - 2bbzz = 0$, il eſt viſible (par les Art. 61 & 63) que cette courbe a un point d'interſection à l'origine *G* de ſes abſciſſes *GQ*, puiſqu'on y a $zz = 0$ & $uu = 0$, & qu'en ce même point *G*, on a $\frac{du}{dz} = \pm\sqrt{2}$. Mais il n'eſt pas moins évident, par l'Art. 94, que ce point d'interſection eſt un point double de la ſeconde eſpece; Car, ſi l'on compare l'Equation donnée $bu^3 + b^2u^2 - z^4 - 2bz^3\sqrt{2} - 2bbzz = 0$, avec l'Equation générale marquée par (10) dans l'Art. 94, on voit que les coëfficiens indéterminés de l'Equation (10) ſont ici $\Delta = 0$, $q = 0$, $\alpha = b$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = bb$, $\iota = 0$, $\eta = 0$, $\lambda = 0$, $\nu = -1$, $\rho = -2b\sqrt{2}$, & $\varphi = -2bb$: Or, en ſubſtituant ces valeurs dans les égalités marquées par (H) & par ($2H$) dans le même Art. 94, on trouve que la premiere de ces égalités (H) devient $z^4 = 0$, & que la ſeconde ($2H$) devient $z^4 + 4bz^3\sqrt{2} = 0$, enſorte que la 4me racine de l'une de ces égalités eſt égale à zero, tandis que la 4me racine de la ſeconde égalité eſt autre que zero. Donc † des deux tangentes *tG*, *TG*, de la courbe au point double *G*, il y en a une qui eſt tan-

* Fig. 51. † Art. 94.

tangente d'une branche *DGM*, qui a une inflexion en ce même point d'interſection *G*, tandis que l'autre *TG* eſt tangente d'une branche *DGA* qui n'a point d'inflexion au point d'attouchement *G*. Donc * le point double *G* n'eſt que de la ſeconde eſpece.

COROLLAIRE I.

XCVI. Puiſque la racine de l'égalité (2 *H*) eſt $z = -4b\sqrt{2}$, il eſt évident qu'après avoir pris ſur l'axe *GQ*, du côté où les (*z*) ſont négatifs, le point *q*, tel que *Gq* ſoit $= 4b\sqrt{2}$, ſi par ce point, on mene une droite *qN* parallele aux ordonnées *QM*, le point *N* où cette droite rencontrera la tangente *TG* prolongée autant qu'il ſera néceſſaire, ſera celui où cette même tangente *TG* rencontre la courbe *MGDGARCRm*, après l'avoir touchée au point double *G*.

COROLLAIRE II.

XCVII. Il eſt clair, par les Art. 71 & 72, qu'en prenant ſur l'axe *GQ*, du côté où les (*z*) ſont négatifs, le point *R*, tel que *GR* ſoit $= b\sqrt{2}$: il eſt clair, dis-je, que ce point *R* eſt encore un point d'interſection ou un ſecond nœud de la courbe *MGDGARCRm*. D'où il ſuit que ſi l'on tranſporte l'origine des abſciſſes de *G* en *R*, en faiſant *RQ* $(z + b\sqrt{2}) = x$, on aura l'Equation $bu^3 + bbuu - x^4 + 2bx^3\sqrt{2} - 2b^2x^2 = 0$, qui exprime le rap-

* *Art* 15.

rapport des abſciſſes RQ aux ordonnées QM. Cela poſé, il eſt évident que ce ſecond point double R eſt encore un point double de la ſeconde eſpece, ce qui ſe prouve en comparant cette nouvelle Equation avec l'Equation générale, marquée par (10) dans l'Art. 94, de même que par la comparaiſon de l'Equation $bu^3 + bbuu - z^4 - 2bz^3\sqrt{2} - 2bbzz = 0$, on a trouvé * que le point double G étoit un point double de la ſeconde eſpece.

REMARQUES.

XCVIII. On peut remarquer, 1°. qu'en prenant ſur la droite GL & ſur la droite RL, (l'une & l'autre paralleles aux ordonnées QM,) en prenant, dis-je, du côté où les (u) ſont négatifs, les points D & C, tels que GD & RC, ſoient l'une & l'autre $= b$: Les points D & C ſeront ceux où la courbe $MGDGARCRm$ coupe les deux droites GL, RL parallelement à l'axe GQ.

2°. Si ſur l'axe GQ on prend, du côté où les abſciſſes GQ ſont négatives, le point B, tel que GB ſoit $= \frac{b}{\sqrt{2}}$, ſi par ce point B, on éleve la droite BA parallele à GL, ſur laquelle on prenne la partie BA égale à la racine réelle de cette égalité $u^3 + buu - \frac{1}{4}b^3 = 0$, le point A eſt celui où cette droite BA eſt coupée par la courbe $MGDGARCRm$ parallelement à ſon axe GQ.

3°. On

* *Art.* 95.

3°. On peut remarquer encore que cette droite *B A* prolongée à l'infini est le diametre de la courbe *MGDGARCRm*; Que cette courbe a deux branches *AGDGM*, *ARCRm*, qui s'étendent à l'infini de part & d'autre de ce diametre; Que chaque branche se noue, l'une au point *G*, en formant le folium *GDG*, l'autre au point *R*, en formant le folium *RCR*; Enfin que ces deux branches infinies sont unies ensemble par l'arc *G A R* qui fait une espece de sinuosité, dont le sommet est en *A*. Proprietés qui se déduisent si aisément de son Equation $bu^3 + bbuu - z^4 - 2bz^3\sqrt{2} - 2b^2z^2 = 0$, qu'il suffit de les indiquer.

4°. Enfin il faut remarquer que cette courbe, qui est un *Bifolium parabolique*, ne differe du *Bifolium MGHDKGAROCFRm* * de l'Art. 73, qu'en ce que les deux points doubles de celui qu'on examine ici † sont de la seconde espece, au-lieu que ceux du *Bifolium* de l'Art. 73 sont de la premiere espece: ce qui suffit pour faire deux differentes especes de courbe.

EXEMPLE. IV.

XCIX. Soit la courbe *AGDGMEHFN RCRA* ⸸ dans laquelle le rapport des ordonnées *BQ* (x) aux abscisses *QM* (u) est exprimé par l'Equation $u^4 - 4bu^3 - 8bbuu + 4x^4 - 8bbxx\sqrt{2} + 8b^4 = 0$: après avoir prouvé, par les Propositions précédentes ‡, que cette courbe a deux points doubles sur son

* Fig. 44. † Fig. 51. ⸸ Fig. 52. ‡ Art. 81.

ſon axe GQ, l'un en G, l'autre en R, tels que $BG = b\sqrt{\sqrt{2}}$ & $BR = -b\sqrt{\sqrt{2}}$, & que ces deux points doubles ſont des points d'interſection *, puiſqu'on y a toujours $\frac{du}{dx} = \pm\sqrt{2\sqrt{2}}$: on demande ſi ces deux points d'interſection ſont de la premiere, ſeconde ou troiſieme eſpece.

On tranſportera l'origine des abſciſſes de B en G, en prenant $z = x - b\sqrt{\sqrt{2}}$, ou bien en faiſant $x = z + b\sqrt{\sqrt{2}}$; & en ſubſtituant cette valeur de (x) dans l'Equation donnée, on aura l'Equation $u^4 - 4bu^3 - 8bbuu + 4z^4 + 16bz^3\sqrt{\sqrt{2}} + 16bbzz\sqrt{2} = 0$ qui exprime le rapport des abſciſſes GQ aux ordonnées QM. Cela fait, on comparera cette nouvelle Equation avec celle de l'Art. 94, & l'on aura $\Delta = 1$, $q = 0$, $\alpha = -4b$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = -8bb$, $\epsilon = 0$, $\eta = 0$, $\lambda = 0$, $\nu = 4$, $\rho = 16b\sqrt{\sqrt{2}}$, $\varphi = 16bb\sqrt{2}$; enſuite ſubſtituant les valeurs de ces coëfficiens, ainſi trouvées, dans les égalités marquées par (H) & par $(2H)$ dans le même Art. 94, la premiere égalité (H) deviendra $3z^4 + 8bz^3\sqrt{\sqrt{2}} = 0$, tandis que la ſeconde $(2H)$ ſe réduit à $z^4 = 0$: enſorte que la quatrieme racine de l'une de ces égalités étant autre

* *Art.* 63, & 72.

autre que zero, pendant que la quatrieme racine de l'autre égalité eſt $=0$, il eſt viſible * que des deux tangentes GT, Gt, de la courbe au point double G, il y en a une qui eſt tangente d'une branche DGA, qui n'a point d'inflexion en G, tandis que l'autre eſt tangente d'une branche DGM qui a une inflexion en G; D'où il ſuit † que le point double G eſt de la ſeconde eſpece.

COROLLAIRE. I.

C. Puiſque la quatrieme racine de l'égalité (H) $3z^4 + 8bz^3 \sqrt{\sqrt{2}} = 0$ eſt $z = -\frac{8}{3}b\sqrt{\sqrt{2}}$, ce qui donne $x = -\frac{5}{3}b\sqrt{\sqrt{2}} = BR + \frac{2}{3}BR$, il eſt clair qu'en prenant ſur l'axe BQ, au-delà du point R, par rapport au point B, le point q, tel que $Rq = \frac{2}{3}BR$, il eſt clair, dis-je, que ſi l'on mene par ce point q une droite qN parallele aux ordonnées QM, le point N, où cette parallele rencontrera la tangente TG, ſera celui où cette même tangente rencontre la courbe $AGDGMEHFNRCRA$, après l'avoir touchée au point double G.

COROLLAIRE II.

CI. Par la même voye on prouvera que le point d'interſection K de la même courbe $AGDGMEHFNRCRA$ eſt un point double de la ſeconde eſpece, & l'on trouvera de même le point où l'une des tangentes de la cour-

* Art. 94. † Art. 15.

courbe, au point double *R*, coupe la portion de la courbe *AGDGMEH*.

REMARQUES.

CII. Il n'eſt pas hors de propos de remarquer ici en paſſant, 1°. Qu'en prenant ſur l'ordonnée principale *BL* les points *A* & *H*, tels que *BA* ſoit égale à la moindre des racines réelles de l'égalité $u^4 - 4bu^3 - 8bbuu + 8b^4 = 0$, & *BH* égal à la plus grande des racines réelles de la même égalité, les points *A* & *H* ſeront ceux où la courbe *AGDGMEHFNRCRA* coupe l'ordonnée principale parallelement à ſon axe *BQ*.

2°. Que l'égalité $u^4 - 4bu^3 - 8bbuu + 8b^4 = 0$, n'ayant que deux racines réelles, qui ſont même poſitives (ainſi qu'il eſt aiſé de le connoitre par les premiers principes de l'Algebre) il s'enſuit que l'ordonnée principale *BL* ne rencontre la courbe en queſtion qu'en deux points.

3°. Que cette même ordonnée principale *BL* eſt le diametre de la courbe *AGDGMEHFNRCRA*, puiſqu'on a par-tout

$$x = \pm \sqrt{bb\sqrt{2} \pm \sqrt{2bbuu + bu^3 - \tfrac{1}{4}u^4}}\,.$$

4°. Après avoir mené par les points doubles *G* & *R* les droites *GE*, *RF*, paralleles aux ordonnées *QM*, ſoient pris ſur ces paralleles les points *I* & *K*, tels que *GI* & *RK* ſoient l'une & l'autre $= 2b$; Si l'on prend, de part & d'autre du point *I*, les points *E* & *D*, & de part & d'autre du point *K* les points

 F & *C*,

F & *C*, tels que *IE*, *ID*, *KF*, *KC*, soient les unes & les autres $= 2b\sqrt{3}$: les points *E* & *D* seront ceux où la courbe coupe la droite *GE* parallelement à l'axe *BQ*, & les points *F* & *C*, ceux où cette même courbe coupe la droite *KF* parallelement au même axe *BQ*.

5°. Après avoir pris sur l'ordonnée principale *BL*, du côté où les (u) sont positifs, le point ω, tel que $B\omega = 4b$, & mené par le point ω la droite $\phi\omega\varpi$ parallele à l'axe *BQ*; Si sur cette même droite $\phi\omega\varpi$, de part & d'autre du point ω, on prend les points ϕ & ϖ, tels que $\omega\phi$ & $\omega\varpi$ soient l'une & l'autre $= b\sqrt{5\sqrt{2}} = BG\sqrt{5}$, les points ϕ & ϖ seront les points de la courbe *AGDGMEHFNRCRA*, où les tangentes sont paralleles à l'ordonnée principale.

6°. Après avoir pris sur l'ordonnée principale *BL*, du côté où les (u) sont négatifs, le point a, tel que $B\text{a} = b$ & mené par le point a, la droite $g\text{a}h$, parallele à l'axe *BQ*, si sur cette même parallele gh, on prend, de part & d'autre du point a, les parties af & ac, l'une & l'autre $= \frac{b\sqrt{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$, & les parties a$h$ & ag, l'une & l'autre $= \frac{b\sqrt{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$, les points f, c, h & g seront quatre points de la courbe où les tangentes sont paralleles à l'ordonnée principale *BL*.

7°. Toutes les droites, menées parallelement à l'axe au-delà des points *E* & *F*, par rap-

rapport au point B, ne rencontrent la courbe en aucun point: car, tant que (u) eſt plus grand que $2b + 2b\sqrt{3}$, les quatre valeurs de

$x = \pm\sqrt{bb\sqrt{2} \pm \sqrt{2bbuu + bu^3 - \frac{1}{4}u^4}}$

ſont imaginaires. De même toutes les droites, menées parallelement à l'axe au-delà des points C & D, par rapport au point B, ne rencontrent la courbe en aucun point: car, tant que ($-u$) ſurpaſſe $2b - 2b\sqrt{3}$, les quatre valeurs

de $x = \pm\sqrt{bb\sqrt{2} \pm \sqrt{2bbuu + bu^3 - \frac{1}{4}u^4}}$

ſont imaginaires. D'où il ſuit que la courbe ne s'étend pas, le long de ſon ordonnée principale BL, au-delà des points E & F, du côté où les (u) ſont poſitifs, ni au-delà des points C & D du côté où les (u) ſont négatifs.

8°. Toutes les droites, menées parallelement à l'ordonnée principale, au-delà des points φ & ϖ, par rapport au point ω, ne rencontrent la courbe en aucun point: car

dès que (x) ſurpaſſe $b\sqrt{5\sqrt{2}}$, les quatre racines de l'égalité $x^4 - 2bbxx\sqrt{2} + \frac{1}{4}u^4 - bu^3 - 2bbuu + 2b^4 = 0$, (dans laquelle au-lieu de (x) on auroit mis une grandeur

qui ſurpaſſeroit $b\sqrt{5\sqrt{2}}$) ſont imaginaires. D'où il ſuit que la courbe ne s'étend pas, le long de ſon axe BQ, au-delà des points φ & ϖ; Mais comme par le nombre précédent, elle ne s'étend pas au-delà des points E, F, C, D, le long de ſon ordonnée principale,

il eſt clair que cette courbe rentre en elle-même.

9°. On démontrera de même, 1°. Que toutes les droites menées, parallelement à l'ordonnée principale *BL*, entre les points *f* & *h*, ou bien entre les points *c* & *g*, rencontrent la courbe en quatre points, dont il y en a toujours deux du côté où les (u) ſont poſitifs, & deux du côté où les (u) ſont négatifs. 2°. Que les droites menées, parallelement à l'ordonnée principale *BL*, entre les points *f* & *c*, ne rencontrent la courbe qu'en deux points, du côté où les (u) ſont poſitifs: enſorte que les portions de la courbe en queſtion, ſituées au-delà de l'axe *BQ*, par rapport aux points *E* & *F*, c'eſt-à-dire, du côté où les ordonnées (u) ſont négatives, forment deux *folium* *GhDfG*, & *RcCgR*, dont les nœuds ſont en *G* & *R*; Ce qui pourroit faire donner à cette courbe le nom d'*Ovale biſoliée*.

EXEMPLE III.

CIII. Soit la Lemniſcate de M. Bernoulli * *GMFBEGφAπG*, dans laquelle le rapport des abſciſſes *GQ* (z) aux ordonnées *QM* (u) eſt exprimé par $u^4 + \overline{2zz + bb} \times uu + z^4 - bbzz = 0$; Il eſt viſible, 1°. Que cette courbe a un point double à l'origine *G* de ſon axe, puiſqu'on y a toujours $uu = 0$ & $zz = 0$; 2°. Que ce point double eſt un point d'interſection, puiſqu'en ce même point

* Fig. 53.

point $\frac{du}{dz} = \pm 1$. Cela posé, on demande si ce point d'interſection *G* eſt de la premiere, ſeconde ou troiſieme eſpece.

Puiſque le point d'interſection eſt à l'origine *G* de l'axe, il ne faut pas tranſporter cet origine ailleurs; ainſi en comparant l'Equation donnée avec l'Equation générale marquée par (10) dans l'Art. 94, on aura $\Delta = 1$, $q = 0$, $\alpha = 0$, $\beta = 2$, $\gamma = 0$, $\delta = bb$, $\epsilon = 0$, $\eta = 0$, $\lambda = 0$, $\nu = 1$, $\rho = 0$, $\phi = -bb$; Enſuite, ſubſtituant les valeurs de ces coëfficiens dans les égalités (*H*) & (2*H*) du même Art. 94, ces deux égalités deviennent l'une & l'autre $z^4 = 0$, enſorte que la 4me racine de l'égalité (*H*) & la 4me racine de l'égalité (2*H*) ſont l'une & l'autre égales à zero. D'où † il ſuit, 1°. Que la tangente *tG* de la courbe au point double *G*, touche une branche *ϖGF*, qui a une inflexion au point d'interſection *G*. 2°. Que la tangente *TG*, au même point double *G*, touche une autre branche *EGφ* qui a auſſi une inflexion au point d'interſection *G*. Donc le point double *G* eſt un point d'interſection de la troiſieme eſpece. *Ce qu'il falloit faire voir par cet Exemple.*

AVERTISSEMENT.

Cette derniere Courbe étant connue depuis que l'illuſtre Géometre, dont elle porte le nom, s'en eſt ſervi pour conſtruire l'Iſochrone-Paracentrique de M. Leibnitz, je ne crois pas devoir m'arrêter ſur

† *Art.* 94.

ſur cet Exemple, comme j'ai fait ſur les précédens. Tout le monde ſait que cette courbe rentre en elle-même, & que les tangentes aux points A *&* B*, extrémités de ſon axe, ſont paralleles aux ordonnées* QM *à cet axe, quel que ſoit l'angle* MQG.

EXEMPLE IV.

CIV. Soit la courbe $MegfmBEG\phi AFG\iota B\mu c\gamma\varpi\xi$ *, dans laquelle le rapport des abſciſſes GQ (z) aux ordonnées QM (u) eſt exprimé par l'Equation $u^4 - aauu - z^4 + bbzz = 0$, (où l'on ſuppoſe toujours $a \angle b$) il eſt viſible que cette courbe a un point double à l'origine G de ſes abſciſſes GQ, & de ſes ordonnées QM, puiſqu'on y a toujours $zz = 0$ & $uu = 0$, & que ce point double eſt un point d'interſection, puiſque $\frac{du}{dz}$ y eſt $= \pm \frac{b}{a}$. Mais il n'eſt pas moins évident que ce point d'interſection eſt un point double de la troiſieme eſpece; Car ſi l'on compare l'Equation donnée $u^4 - aauu - z^4 + bbzz = 0$, avec l'Equation générale, marquée par (10) dans l'Art. 94, on a ici $\Delta = 1$, $q = 0$, $\alpha = 0$, $\epsilon = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = -aa$, $\iota = 0$, $\eta = 0$, $\lambda = 0$, $\nu = -1$, $\rho = 0$, & $\phi = bb$. Or en ſubſtituant ces valeurs dans les égalités marquées par (H) & par $(2H)$ dans le même Art. 94, on voit que ces deux égalités ſe réduiſent à celle-ci $\overline{b^4 - a^4} \times z^4 = 0$, dans laquelle les quatre racines de (z) ſont $= 0$. D'où il ſuit † que le

* Fig. 54. † Art. 94.

le point d'interfection G eft un point double de la troifieme efpece. *Ce qu'il falloit faire voir par cet Exemple.*

REMARQUES.

CV. Il eft aifé de voir, 1°. que l'axe GQ de cette courbe eft un des diametres de la courbe en queftion, puifque l'on a toujours $u = \pm \sqrt{\frac{1}{2}aa \pm \sqrt{z^4 - bbzz + \frac{1}{4}a^4}}$.

2°. Si l'on prend fur le diametre GQ, de part & d'autre du point G, les parties Gg & $G\gamma$, l'une & l'autre $= b$, les points g & γ feront ceux où la courbe coupe ce diametre, parallelement à l'ordonnée principale GL.

3°. Si l'on prend fur le diametre GQ, de part & d'autre du point G, les parties GS, $G\omega$, l'une & l'autre $= \sqrt{\frac{1}{2}bb - \frac{1}{2}\sqrt{b^4 - a^4}}$, & enfuite les parties $G\sigma$, $G\delta$, l'une & l'autre $= \sqrt{\frac{1}{2}bb + \frac{1}{2}\sqrt{b^4 - a^4}}$: fi des points S, ω, σ & δ, on éleve des droites SE, $\omega\epsilon$, σe, δc, paralleles à l'ordonnée principale GL, & les unes & les autres $= \frac{a}{\sqrt{2}}$: fi l'on prolonge également ces quatre droites, du côté où les (u) font négatifs, enforte que SF foit $= SE$, $\omega\epsilon = \omega\varphi$, $\sigma e = \sigma f$, & $\delta c = \delta\pi$, les points E, F, e, f, ϵ, ϕ, c, π, feront les huit points de la courbe qui ont des tangentes paralleles à l'ordonnée principale GL.

4°. Il eft aifé de voir que l'ordonnée principale GL, prolongée de part & d'au-

tre du point G, eſt un des diametres de cette courbe, puiſque l'on a toujours $z = \pm \sqrt{\frac{1}{2}bb \pm \sqrt{u^4 - aauu + \frac{1}{4}b^4}}$.

5°. Si l'on prend ſur le diametre GL de part & d'autre du point G les parties GB, GA, l'une & l'autre $= \alpha$, les points B & A feront ceux où la courbe coupe ce diametre, parallelement à l'axe GQ.

6°. Toutes les droites menées, parallelement au diametre GL, entre les points S & ω, rencontrent la courbe en quatre points; Car dès que $\pm z < \sqrt{\frac{1}{2}bb - \frac{1}{2}\sqrt{b^4 - a^4}}$, les quatre valeurs de l'ordonnée (u) qui ſont $\pm \sqrt{\frac{1}{2}aa \pm \sqrt{\quad - bbzz + \frac{1}{4}a^4}}$, ſont réelles. Mais les droites menées, parallelement à ce même diametre GL, entre les points S & σ, ou entre les points ω & δ, ne rencontrent point la courbe: car dès que $\pm z > \sqrt{\frac{1}{2}bb - \frac{1}{2}\sqrt{b^4 - a^4}}$, & $< \sqrt{\frac{1}{2}bb + \frac{1}{2}\sqrt{b^4 - a^4}}$, les quatre valeurs de (u), qui ſont $\pm \sqrt{\frac{1}{2}aa \pm \sqrt{z^4 - bbzz + \frac{1}{4}a^4}}$, ſont imaginaires. D'où il ſuit que la portion de courbe $GEB\epsilon GFA\varphi G$, renfermée entre les droites ESF, $\epsilon\omega\varphi$, n'eſt pas unie, ſur le plan, aux deux autres portions $Megfm$, $\mu\epsilon\gamma\varpi\xi$, de la même courbe.

7°. Toutes les droites menées, parallelement à l'ordonnée principale GL, entre les points σ & g, ou entre les points δ & γ, rencontrent la courbe en quatre points. Car dès que

que $(\pm z)$ surpasse $\sqrt{\frac{1}{2}bb + \frac{1}{2}\sqrt{b^4 - a^4}}$ & est moindre que b, les quatre valeurs de l'ordonnée (u), qui sont $\pm\sqrt{\frac{1}{2}aa \pm \sqrt{z^4 - bbzz + \frac{1}{4}a^4}}$, sont réelles. Mais les droites menées, parallelement à l'ordonnée principale GL, au-delà des points g & γ, par rapport au point double G, à quelque distance qu'elles soient de ce point double G, ne rencontrent la courbe qu'en deux points; Car dès que $\pm z > b$, des quatre valeurs de l'indéterminée (u) il n'y en a que deux réelles, savoir $\pm\sqrt{\frac{1}{2}aa + \sqrt{z^4 - bbzz + \frac{1}{4}a^4}}$, les deux autres $\pm\sqrt{\frac{1}{2}aa - \sqrt{z^4 - bbzz + \frac{1}{4}a^4}}$ étant toujours imaginaires dans ce cas-là. D'où il suit que la portion de courbe $Megfm$ & son opposée $\mu C\gamma\varpi\xi$ s'étendent l'une & l'autre à l'infini, de part & d'autre de l'ordonnée principale GL, en formant les quatre branches infinies geM, $\gamma C\mu$, gfm, $\gamma\varpi\xi$, dont les deux premieres sont du côté des (u) positifs, & les deux autres du côté des (u) négatifs.

8°. Toutes les droites, comme $ML\mu$, ou bien $ml\xi$, menées parallelement à l'axe GQ, au-delà des points B & A, par rapport au point G, ne rencontrent la courbe qu'en deux points; Car dès que GL $(+u)$ ou GI $(-u)$ surpassent GB ou GA $(\pm a)$ des quatre valeurs de l'indéterminée $(z) = \pm\sqrt{\frac{1}{2}bb \pm \sqrt{u^4 - aauu + \frac{1}{4}b^4}}$, il n'y en a que deux réelles; savoir, $\pm$

$\pm\sqrt{\frac{1}{2}bb+\sqrt{u^4-aauu+\frac{1}{4}b^4}}$, les deux autres $\pm\sqrt{\frac{1}{2}bb-\sqrt{u^4-aauu+\frac{1}{4}b^4}}$, étant imaginaires. D'où il ſuit que la portion de courbe $GEB\varepsilon GFA\varphi G$ (qui eſt entre les quatre branches infinies geM, $\gamma c\mu$, gfm, $\gamma\pi\xi$) ne s'étend pas au-dela des points B & A, le long de l'ordonnée principale GL; & comme elle ne s'étend pas au-delà des points S & ω, le long de l'axe GQ (comme il a été remarqué dans le nombre 6 de cet Article) il eſt évident que c'eſt une portion de courbe rentrante en elle-même; D'ailleurs puiſque cette portion de courbe $GEB\varepsilon G FA\varphi G$ a un point double d'interſection en G, il s'enſuit que cette portion de courbe eſt une *Lemniſcate* conjuguée.

9°. Après avoir mené, par le point g, une droite gH, parallele à l'ordonnée principale GL: ſi l'on prend ſur cette droite, de part & d'autre du point g, les portions gH, gh, l'une & l'autre égales à Gg: ſi par les points G & h, on mene la droite Gh, & par les points G & H, la droite GH: ces deux droites prolongées à l'infini, de part & d'autre du point G, feront aſymptotes à la courbe: la 1ere aux branches infinies gfm, $\gamma c\mu$, & la ſeconde aux branches infinies geM, $\gamma\pi\xi$. D'où il ſuit que cette courbe eſt compoſée de quatre branches hyperboliques, & d'une Lemniſcate conjuguée.

PRO-

PROPOSITION IX.

THEOREME.

CVI. *Les lignes du 4me ordre peuvent être coupées par une Section conique en huit points simples, sans pouvoir l'être en un plus grand nombre de points.*

DEMONSTRATION.

Soit une ligne du 4me ordre *ZMEFHXS bfeV* *, coupée au point *m* par une Section conique *BmNA8mD*, il faut démontrer que cette Section conique peut couper la ligne du 4me ordre en sept autres points, comme 2*m*, 3*m*, 4*m*, 5*m*, 6*m*, 7*m*, 8*m*, & qu'elle ne sauroit la couper en un plus grand nombre.

Après avoir mené à discretion la ligne droite *GQ* (que l'on prendra pour Axe commun à la ligne du 4me ordre *ZMEFHXSbfeV* & à la Section conique *BNAD*), par un point quelconque *Q*, de la droite *GQ*, on menera une droite *QMN*, sécante en *M* de la ligne du 4me ordre, & en *N* de la Section conique: si on nomme l'abscisse *GQ* (*z*), l'ordonnée de la ligne du 4me ordre *QM* (*u*), & l'ordonnée de la Section conique *QN* (*y*), le rapport de l'abscisse *GQ* (*z*) à l'ordonnée *QM* (*u*) sera exprimé par une Equation qui ne sera qu'un cas particulier de l'Equa-

* Fig. 55.

quation générale, marquée par (4 D)*, puisque (par l'Art. 31 du premier Mémoire) cette Equation exprime la nature de toutes les lignes du 4me ordre: De même le rapport des abscisses *G Q* (*z*) aux ordonnées *Q N* (*y*) de la Section conique *B N A D* sera exprimé par une Equation particuliere qu'on pourra toujours rapporter à l'Equation générale, marquée par (2 D) †, puisque (par l'Art. 29 du premier Mémoire, nomb. 2) cette Equation exprime la nature de toutes les lignes du 2d ordre.

Cela posé, il est évident que l'ordonnée *Q N* (*y*) de la Section conique *B N A D* devient égale à l'ordonnée *Q M* (*u*) de la ligne du 4me ordre dans tous les points *m*, 2*m*, 3*m*, &c. où ces deux courbes s'entrecoupent ou se rencontrent ; D'où il suit qu'on a alors $y = u$, ainsi l'Equation (2 D) devient telle qu'on la voit marquée par (Δ) ‡.

Maintenant, si l'on substitue dans l'Equation marquée par (4 D), au-lieu de l'indéterminée (*u*), sa valeur prise de l'Equation marquée par (Δ), il est certain qu'il en viendra une Equation dans laquelle il n'y aura plus qu'une seule inconnue (*z*) dont les racines donneront les valeurs des abscisses *G q*, *G* 2 *q*, *G* 3 *q*, *G* 4 *q*, *G* 5 *q*, &c. auxquelles correspondent des ordonnées *q m*, 2 *q* 2 *m*, 3 *q* 3 *m*, 4 *q* 4 *m*, 5 *q* 5 *m*, &c. communes aux deux courbes *Z M E F H X S b f e V* & *B N A D*; Or cette

* *Voyez la Table à la fin de ce Mémoire.*
† *Voyez la même Table.*
‡ *Voyez la Table à la fin de ce Mémoire.*

cette substitution, dont j'obmets ici le calcul, qui est un peu long, mais qui n'a rien de difficile, ni qui ne soit à la portée de tout le monde, cette substitution, dis-je, donne l'égalité marquée par R (dans laquelle les coëfficiens A, B, C, D, E, F, G, H & K, sont donnés en $q, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \nu, \lambda, \mu, \nu, \rho, \pi, \varphi, \sigma$ & en f, e, g, b, k, tels qu'on les voit représentées dans la Table qui est à la fin de ce Mémoire). Mais puisque l'égalité marquée par (R) est du huitieme degré, il est évident qu'elle peut fournir huit valeurs réelles & differentes de l'indéterminée (z), & par conséquent huit abscisses $Gq, G2q, G3q, G4q, G5q, G6q, G7q, G8q$, auxquelles correspondent huit ordonnées $qm, 2q2m, 3q3m, 4q4m, 5q5m, 6q6m, 7q7m, 8q8m$, communes à la ligne du 4me ordre $ZMEFHXS\,hfeV$, & à la ligne du 2d ordre ou Section conique $BNAD$, & qu'il ne sauroit y en avoir un plus grand nombre. Donc, il peut y avoir huit points simples $m, 2m, 3m, 4m, 5m, 6m, 7m$ & $8m$, communs à la Section conique & à la ligne du 4me ordre, sans qu'il puisse y en avoir un plus grand nombre. Donc les lignes du 4me ordre peuvent être coupées par une Section conique en huit points, sans pouvoir l'être en un plus grand nombre. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

CVII. Si la Section conique $BNAD$ passe par un des points doubles $(5m)$ de la ligne du 4me ordre $ZMEFHXS\,5mb6mfeV$ *;

* Fig. 56.

il y aura dans l'égalité marquée par (*R*), deux racines réelles & de mêmes ſignes, & cela parce que le point double eſt équivalent à deux points ſimples *.

Si cette Section conique paſſe par deux des points doubles de la ligne du 4me ordre, l'égalité marquée par (*R*) † outre les deux premieres racines réelles égales & de mêmes ſignes, en aura encore deux autres réelles égales & de mêmes ſignes.

Enfin ſi cette Section conique *BNAD* ‡ paſſe par les trois points doubles $2m$, $4m$ & $6m$ de la ligne du 4me ordre *ZEMFHXSheZ*, l'égalité du huitieme degré, marquée par (*R*), outre la premiere paire de racines réelles égales & de mêmes ſignes, qu'elle doit avoir à cauſe du point double $2m$: outre la ſeconde paire de racines réelles égales & de mêmes ſignes qu'elle aura à cauſe du point double $4m$, aura encore une troiſieme paire de racines réelles égales & de mêmes ſignes, à cauſe du troiſieme point double $6m$; & cela parce que trois points doubles ſont équivalens à ſix points ſimples, pris deux à deux.

REMARQUES.

CVIII. De même qu'on a démontré dans l'Art. 106, que les lignes du 4me ordre peuvent être coupées par une Section conique en

* *Art.* 12.
† *V. la Table à la fin de ce Mémoire.*
‡ Fig. 57.

en huit points, ſans pouvoir l'être en un plus grand nombre: on démontrera, en ſuivant la même méthode, 1°. Que les lignes du 5me ordre peuvent être coupées en dix points, par une Section conique, & ne ſauroient l'être en un plus grand nombre: 2°. Que les lignes du 6me ordre peuvent être coupées en douze points, par une Section conique, ſans pouvoir l'être en un plus grand nombre de points. 3°. Que les lignes du 7me ordre peuvent être coupées par une Section conique en quatorze points, ſans pouvoir l'être en un plus grand nombre. 4°. Enfin que les lignes algébriques de l'ordre n peuvent être coupées, par une Section conique, en autant de points qu'il y a d'unités dans $2n$, ſans pouvoir l'être en un plus grand nombre. Vérités qui ont déja été démontrées par M. Mac-Laurin dans ſon ſavant Traité intitulé *Geometria organica*.

PROPOSITION X.

THEOREME.

CIX. *Une ligne qui a quatre points doubles ne ſauroit être du 4me ordre.*

DEMONSTRATION.

Soit * une ligne courbe *ZMBEBGFGRCRVDVX*, dont on connoit les quatre points doubles *B*, *G*, *R* & *V*. Je dis que cette

* Fig. 58.

cette ligne ne sauroit être du 4me ordre. Après avoir pris à discretion sur cette même courbe un point simple quelconque M, par les quatre points doubles donnés B, G, R, V, & par le 5me point M, pris à discretion, faites passer une Section conique OAH, (ce qui est toujours possible par l'Art. 180 des Sections coniques de M. le M. de l'Hôpital) il est visible que la Section conique coupera la courbe qui a les quatre points doubles B, G, R, V, en neuf points; Car chaque point double étant équivalent à deux points simples *, les quatre points doubles sont équivalens à huit points simples, & le point d'interfection M fait le neuvieme. Or, par l'Art. 106, les lignes du 4me ordre ne sauroient être coupées par une Section conique en plus de huit points. Donc puisque la courbe $ZMBEBGFGRCRVDVX$, qui a les quatre points doubles B, G, R & V, peut toujours être coupée par une Section conique OAH en neuf points, il s'ensuit que cette courbe ne sauroit être du 4me ordre. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

CX. Il suit de-là & de l'Art. 83, qu'une ligne du 4me ordre, ne sauroit avoir plus de trois points doubles.

REMARQUES.

CXI. Après avoir prouvé qu'une ligne du

* *Art.* 12.

du 4me ordre ne fauroit avoir plus de trois points doubles, on démontrera de même, 1°. Qu'une ligne du 5me ordre ne fauroit jamais avoir plus de fix points doubles. 2°. Qu'une ligne du 6me ordre ne fauroit en avoir plus de dix. 3°. Qu'une ligne du 7me ordre ne fauroit en avoir plus de quinze. 4°. Qu'une ligne du 8me ordre ne fauroit en avoir plus de vingt-un, & ainfi de fuite, fuivant la progreffion des nombres triangulaires. Enforte que fi n exprime, par le nombre de fes unités, l'ordre d'une ligne quelconque, le nombre des points doubles, dont les lignes de cet ordre font fufceptibles, fera exprimé par le nombre triangulaire, qui dans le Triangle de M. Pafcal correfpond au nombre naturel $n-1$. Or, on fait que le nombre triangulaire, correfpondant au nombre naturel $n-1$, eft $\frac{\overline{n-1}\cdot\overline{n-2}}{2} = \frac{nn-3n+2}{2}$; Donc cette expreffion $\frac{nn-3n+2}{2}$ exprime toujours, par le nombre de fes unités, le plus grand nombre de points doubles dont une ligne de l'ordre exprimé par n eft fufceptible. Vérité qui n'avoit pas encore été remarquée jufqu'ici.

AVERTISSEMENT.

Ce Mémoire étant déja trop long, on a été obligé, après qu'il a été lu à l'Académie, d'en retrancher, à l'impreffion, une grande partie, pour laiffer de la place aux Mémoires fuivans. Ce qu'on

a retranché de celui-ci concerne les Osculations de deux branches d'une même courbe, & les Lemniscates infiniment petites : propriétés singulieres dont les lignes algébriques ne deviennent susceptibles que lorsqu'elles sont du quatrieme ordre, ou d'un ordre supérieur au quatrieme. On a donc pris le parti de renvoyer tout ce qui regarde cette Théorie à un troisieme Mémoire, qu'on a remis dans les Registres de l'Académie, avec celui où il est traité des differentes sortes de points triples qu'on rencontre souvent sur les lignes du quatrieme ordre. Ce qui doit précéder l'énumeration de ces mêmes lignes.

DE LA CAPSULE DU CRISTALLIN.

Par M. PETIT le Médecin *.

NOUS avons dit, dans notre précédent Mémoire, que le Crystallin est enchassé dans la partie antérieure de l'Humeur vitrée, comme un diamant dans son chaton, & y est retenu par une membrane qui l'enveloppe, & qui pour cela est nommée la *Capsule du Crystallin*.

Cette membrane est aussi appellée *Arachnoïde* par les Anatomistes, parce que sa finesse la fait ressembler à une toile d'Araignée.

D'autres l'ont nommée *Crystalloïde*. Quelques-uns ont douté de son existence; ce qui est d'autant plus étonnant, que Galien † en a

* 16 Août 1730. † *De Oculis, cap.* 3.



5 Août 1730. † *De Oculis, cap.* 3.

Fig. 50.

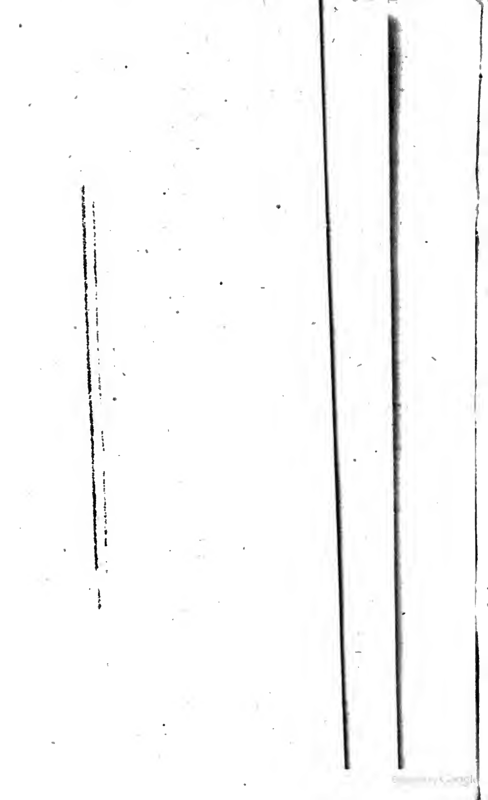
L
M
B
E
G
R
Q
A
N

L
M

Fig. 48.

C
G
R
Q
B
F
A
φ





a parlé, & la fait reſſembler à une pellicule d'Oignon, à laquelle auſſi Véſale [a] la compare: il la fait encore reſſembler à de la Corne très fine & très tranſparente. Caſſerius Placentinus [b] en donne la deſcription. Bartholin & d'autres ont parlé de cette Membrane. Après cela il n'y avoit qu'à la chercher, elle n'eſt pas difficile à trouver dans les Animaux à quatre pieds, principalement dans le Mouton, le Bœuf & le Cheval; & quoiqu'elle ſoit un peu plus difficile dans l'Homme, on la trouve facilement auſſi-tôt qu'on l'a vu démontrer une ſeule fois; ce qu'il y a de ſurprenant, c'eſt que Brigs [c] n'en dit pas un ſeul mot, & qu'un auſſi habile Anatomiſte que Ruiſch ait douté longtems de ſon exiſtence. Voici comme il s'en explique lui-même [d]: *De hujuſce membranulæ exiſtentiâ Anatomici alii aliter ſentiunt: quidam illam dari negant, nonnulli ambigunt, alii eandem admittunt, ipſe quoque diù anceps hæſi, quid de hoc negotio ſtatuerem? verùm cùm repleviſſem arterias Oculi ovini cereâ materiâ, aperiebam Oculum, membranaſque perſcrutaban, & ſic videbam per membranulam araneam plurimas arteriolas diſperſas.* On voit qu'il ne s'eſt aſſuré de cette membrane que par l'injection, quoique très facile à démontrer dans le Mouton.

Cette Capſule eſt adhérente par ſa partie poſtérieure à la membrane hyaloïde ou vitrée; on peut les ſéparer facilement l'une de l'autre ſans le ſecours du ciſeau ou du ſcalpel, ce

a *Lib. 7. c. 14.* b *Lib. 5. c. 16. edit. 1622.*
c *Ophthalmographia.* d *Theſaurus Anat. 2. p. 37.*

ce qui ne se peut à l'endroit où la Vitrée fait une continuité avec cette membrane dans toute la circonference du Cryſtallin, car il faut ſe ſervir d'un inſtrument tranchant pour les ſéparer. La partie antérieure de cette Capſule ſe diviſe facilement de la circonference au centre, & du centre à la circonference, ſelon la rectitude de ſes fibres.

Quelques Anatomiſtes * ont cru que cette Capſule tient au Cryſtallin par ſes bords. Mais ſi l'on diſſeque cette partie avec attention, on trouvera que cette Capſule ne tient en aucun endroit du Cryſtallin. D'autres diſent hardiment qu'elle n'eſt point continue avec la membrane hyaloïde, parce que, diſent-ils, il s'enſuivroit que du moment que cette Capſule ſeroit alterée, ſon alteration ſe communiqueroit infailliblement à la membrane hyaloïde, elle la corromproit, & rendroit par-là inutiles toutes les opérations des Cataractes cryſtallines, puiſque la membrane du corps vitrée perdroit ſa tranſparence. 1°. Il ne faut que des yeux pour voir la continuité de la Capſule avec la membrane hyaloïde, cela ſe découvre avec la même facilité que l'on voit que la peau du bras eſt continue avec celle de la main. 2°. Il ne s'enſuit pas de ce qu'une membrane eſt continue avec une autre, que les alterations ſe communiquent infailliblement de l'une à l'autre; une inflammation peut occuper une partie de la main ſans ſe communiquer à l'autre partie, quoique la peau ſoit continue. 3°. L'eſpece d'alteration, dont on en-

* *Hiſt. de l'Acad. des Sc. année 1722. p. 22.*

entend parler, qui eſt ſans doute l'opacité de la Capſule, ne ſe doit rencontrer que bien rarement; je ne l'ai jamais trouvée opaque dans aucune des Cataractes que j'ai vu ſur le mort, & l'on verra dans la ſuite de ce Mémoire, que je n'ai pu la rendre opaque par la plupart des eſprits acides. J'ai une fois rencontré une tache blanche, ronde, d'une ligne de diametre dans cette Capſule, mais qui s'eſt diſſipée, en frottant la partie interne de cette Capſule: ce n'étoit que des particules du Cryſtallin devenues blanches & opaques, & qui ſont reſtées ſur la ſurface interne de la Capſule, lorſque je l'ai enlevée; & ſuppoſé que cette membrane devienne opaque, il ne feroit pas poſſible de déterminer ſi c'eſt le Cryſtallin ou la membrane, en l'examinant à travers la Cornée.

Il eſt très difficile de déterminer l'épaiſſeur de cette Capſule, elle eſt dans l'Homme une fois plus épaiſſe qu'une toile d'araignée, elle eſt plus fine de la moitié à ſa partie poſtérieure. On la trouve de cette derniere fineſſe dans la Carpe, le Barbeau, le Brochet, l'Anguille, & d'autres Poiſſons de cette ſorte. Le Marſouin a cette Capſule un peu plus épaiſſe que celle de l'Homme, je l'ai vu une fois auſſi épaiſſe dans la Carpe de Mer.

Je l'ai vu dans le Bœuf une fois plus épaiſſe que dans l'Homme. Elle eſt plus épaiſſe dans le Cheval que dans le Bœuf.

Le Chien, le Chat, le Loup, le Lapin, le Lievre l'ont tant ſoit peu plus épaiſſe que celle de l'Homme. Elle eſt plus épaiſſe dans

le Mouton que dans ces Animaux, mais moins que dans le Bœuf.

Malgré la finesse de cette membrane dans l'Homme, elle n'y est pourtant pas si transparente à sa partie antérieure, que dans les autres Animaux qui l'ont beaucoup plus épaisse, comme le Bœuf & le Cheval.

Si l'on regarde la partie postérieure du Crystallin, de quelque âge que ce soit, envelopé de sa Capsule, on y trouve plus de transparence, que lorsqu'on le regarde par sa partie antérieure qui paroît tant soit peu terne; mais si on enleve la Capsule, le Crystallin paroit également transparent des deux côtés. J'ai néanmoins vu des Crystallins d'Homme, dont la partie antérieure de la Capsule étoit aussi transparente que la postérieure. Elle est d'une très grande transparence dans ses deux surfaces, dans tous les Animaux à quatre pieds, les Oiseaux & les Poissons.

Le ligament ciliaire qui prend son origine du plus grand cercle de l'Uvée, s'attache & se termine tout à l'entour de la partie antérieure de la Capsule sur laquelle ce ligament prolonge ses fibres, & les vaisseaux qu'il lui fournit. Il y a des Anatomistes qui ont cru que ce ligament s'attache au Crystallin; Brigs est de ce sentiment: les vaisseaux que le ligament fournit à la Capsule ne sont que des lymphatiques qui dégorgent & répandent leurs liqueurs dans la cavité de la Capsule. Il se trouve des occasions où ces vaisseaux sont remplis de sang, & pour-lors on les voit ramefiés sur la partie antérieure de la Capsule: je n'en ai jamais trouvé à la partie postérieure.

re. Ces vaisseaux sont formés par plusieurs petits troncs qui ont leur racine dans le ligament ciliaire, leurs ramifications sont dirigées vers le centre de la Capsule, & forment entre elles des anastomoses, c'est ce que j'ai vu dans quelques Enfans nouveau-nés; mais dans un jeune Marsouin, la Capsule paroissoit seulement rougeâtre, il a fallu se servir d'une Loupe, pour y reconnoitre la distribution des vaisseaux qui étoit la même que dans les Enfans. La Tête de ces Enfans avoit resté longtems au passage de la Matrice dans des accouchemens laborieux. Les parties extérieures de la Tête étant comprimées, le Sang n'a pu y circuler, & s'est porté dans les parties intérieures où il s'est trouvé pour-lors en très grande quantité, il a forcé les embouchures des vaisseaux lymphatiques qui se trouvent très disposés à se dilater dans les nouveau-nés, & à donner passage au Sang qui les remplit; mais dans le jeune Marsouin cela est arrivé d'une maniere un peu differente, il avoit été pêché avec sa mere, qui avoit les mammelles remplies de lait. Lorsqu'on tire les Poissons de l'eau, on les jette rudement dans les Barques où ils se débattent avant que de mourir, & comme ils sont couchés sur le côté, les parties extérieures de la Tête & des Yeux se froissent & se meurtrissent, & pour-lors le Sang qui se trouve dans les parties extérieures du globe de l'Oeil, n'y pouvant circuler, force les embouchures des vaisseaux excrétoires-intérieures, dans lesquels il s'introduit, comme je l'ai dit des Fœtus humains.

Les vaiſſeaux de la Capſule n'étoient point remplis dans la mere de ce jeune Marſouin, dont j'ai diſſequé les Yeux. J'ai encore vu ces vaiſſeaux ſeringués dans un Fœtus & dans quelques Chats, chez un Médecin Anglois qui étoit à Paris. Il en avoit injecté pluſieurs, dont quelques-uns avoient réuſſi avec du ſuif ſeul, coloré avec le cinabre. Le ſuif avoit été mis en digeſtion pendant quinze jours dans un Matras ſur le ſable, avec ſon vaiſſeau de rencontre.

J'ai diſſequé les Yeux de trois Hommes, morts à la Charité avec de grandes inflammations aux yeux; j'ai examiné la Capſule du Cryſtallin, je n'y ai trouvé aucun vaiſſeau rempli de ſang.

J'ai examiné avec un grand ſoin les Capſules des Sujets dont les vaiſſeaux ſe ſont trouvés ſeringués ou remplis de ſang, pour voir ſi quelques-uns de ces vaiſſeaux ſe continuoient dans le Cryſtallin; mais quelque précaution que j'aye priſe, je n'en ai trouvé aucun, ni dans les Fœtus dont les vaiſſeaux de la Capſule étoient remplis de cire ou de ſang, ni dans les Chats & le jeune Marſouin dont j'ai parlé, ni dans quelques Cryſtallins de Veau dans leſquels l'injection avoit réuſſi.

Le célebre M. Ruiſch *, qui paroît avoir injecté pluſieurs Animaux, dont il a examiné les Yeux, ne dit rien des vaiſſeaux du Cryſtallin, quoiqu'il décrive les vaiſſeaux de la Capſule; il dit même une choſe qui lui eſt ar-

* *Theſaur. Anatom.* 2. *p.* 37. c'eſt la ſuite du même endroit que j'ai rapporté ci-deſſus page 1.

arrivée, & qu'il eſt bon de rapporter : „ Ayant, „ dit-il, rempli de cire un Oeil de Mouton, „ & diſſequé cet Oeil, je remarquai plu- „ ſieurs arteres * diſperſées ſur la membrane „ arachnoïde ; je mis ce Cryſtallin avec ſa „ Capſule dans une liqueur limpide, mais le „ jour ſuivant voulant examiner les mêmes „ vaiſſeaux, je ne les trouvai plus.

La raiſon qu'il en donne me paroit très plauſible : „ J'avois, dit-il, rempli de matie- „ re de cire (*cereâ materiâ*) les arteres de „ l'Oeil juſques près le Cryſtallin, où elle „ étoit reſtée ſans pénétrer dans la membra- „ ne arachnoïde qui envelope le Cryſtallin ; „ mais la matiere de cire ayant pouſſé devant „ elle le ſang qu'elle avoit trouvé dans les „ arteres, avoit tellement rempli les vaiſ- „ ſeaux de la membrane arachnoïde, que la „ cire n'y a plus trouvé de paſſage, & ce „ ſang a été diſſout & diſſipé par la liqueur „ dans laquelle on a mis tremper le Cryſtallin „ avec ſa Capſule ". Je rapporte ceci, afin que ceux qui feront ces ſortes d'injections prennent garde à cette circonſtance : peut-être n'y avoit-il que du ſang dans toutes les Capſules que j'ai vu.

Examinons préſentement ce que penſe Hovius † ſur cette matiere, lui qui paroît avoir fait quantité d'injections pour les Yeux ſeuls. Il croit que le Cryſtallin a des vaiſſeaux qui pénétrent ſa ſubſtance. Il dit d'abord, ‡ que le Cryſ-

* Il veut dire, *les vaiſſeaux lymphatiques arteriels.*
† *Tractatus de circulari humorum motu in Oculis.*
‡ *Pag. 45.*

Cryſtallin eſt un tiſſu de vaiſſeaux tranſparens neurolymphatiques qui portent & rapportent la lymphe, recouvert d'une tunique tranſparente & très fine: *Eſt itaque humor Cryſtallinus contextum mere vaſculoſum è nervis pellucidis neuroque lymphaticis, tum ad, tum abducentibus vaſis, conſtructum, tenuiſſima & pellucida tunica obductum.* Voyez, dit-il, la Figure 4. Tab. 5. Voici l'explication qu'il donne de cette Figure *.

† *Humor eſt Cryſtallinus noſtra methodo reſolutus cum vaſculis fluctuantibus depictus.* Voilà le titre de cette explication. La Figure, dit-il, repréſente un Cryſtallin réſout ou diſſout par une méthode qui lui eſt particuliere, avec des vaiſſeaux qui flottent: c'eſt pourtant ce que l'on n'y voit point, elle repréſente plutôt la premiere partie de ſon explication. A, *Cryſtallinus eſt humor, more noſtro poſt tunicæ ablationem in laminas diviſus.* Effectivement le Cryſtallin paroît fendu du centre à la circonference, comme s'il l'avoit mis tremper dans quelque liqueur acide, ou qu'il l'eût fait bouillir de même que ceux que j'ai démontré à l'Académie. On voit autour de ce Cryſtallin une diſtribution de vaiſſeaux toute ſemblable à celle que j'ai vue à la partie anterieure de la Capſule, injectée; elle eſt diviſée & ouverte en pluſieurs parties pour découvrir le Cryſtallin. Il dit que ce ſont des vaiſſeaux du Cryſtallin ſéparés des lames ſupérieures du

* Il eſt bon de voir cette Figure dans Hovius même, en liſant cet endroit du Mémoire.

† *Pag.* 152.

du Cryſtallin. BB, *vaſcula ſunt Cryſtallina conquaſſatione è laminis ſuperioribus, divulſa, expanſa.* Il les a ſéparé *conquaſſatione*, par les ſecouſſes & les battemens, apparemment dans de l'eau, c'eſt ce qu'il faut deviner ſur le titre de cette Figure, *cum vaſculis fluctuantibus*, ce qui marque que c'eſt dans quelque liqueur qu'il a battû ce Cryſtallin. Il s'eſt peut-être imaginé que l'on pourroit croire que le Cryſtallin peut ſe diſſoudre de maniere qu'il n'en reſte que les vaiſſeaux, comme il arrive au Foye, dont on peut ſéparer les vaiſſeaux de la ſubſtance glanduleuſe, après l'avoir fait macerer quelque tems dans l'eau: mais il y a bien de la difference, le Foye a des vaiſſeaux capâbles de réſiſter aux ſecouſſes & aux battemens que l'on eſt obligé de faire, encore les faut-il bien ménager pour ne rompre de vaiſſeaux que le moins qu'il eſt poſſible. Il ne faut pas s'attendre de conſerver des vaiſſeaux auſſi fins que ceux qu'il ſuppoſe dans le Cryſtallin, il s'en briſe de bien plus gros que l'on ne peut conſerver. Si on bat un Cryſtallin dans l'eau avant de l'avoir laiſſé tremper quelque tems, on le briſe en pluſieurs molécules, dans leſquelles on ne voit aucun vaiſſeau lymphatique, pas même avec le Micrôſcope; on n'y remarque que les fibres que j'ai démontrées à l'Académie. Si l'on fait tremper le Cryſtallin dans l'eau pendant quelques jours, les fibres qui le compoſent ſe diſſolvent, & deviennent une matiere ſemblable à de la bouillie; s'il y avoit des vaiſſeaux differens de ces fibres, on devroit en trouver quelques ramifications, car ces vaiſ-

vaiſſeaux doivent être differens des fibres par leur direction.

Suppoſé qu'il y eût des vaiſſeaux remplis d'injection, ils ne pourroient facilement ſe ſéparer de la ſubſtance du Cryſtallin, & laiſſer cette ſubſtance diviſée en lames, comme il le dit, tout doit ſe ſéparer en molécules, des vaiſſeaux ſi délicats ſe briſeroient encore plus facilement que les autres parties du Cryſtallin.

Enfin Hovius dit, * en comparant les vaiſſeaux de l'Humeur vitrée avec ceux du Cryſtallin, que ceux de l'Humeur vitrée ſont longs, & ont peu de ſubdiviſion, que ceux du Cryſtallin ſont plus étroits & plus ſerrés, & dont on ne peut trouver les ſubdiviſions, † *In Cryſtallino vero arctiora & firmiùs compacta ſunt, imperſcrutabiles ſubeunt ſubdiviſiones*; & il répete encore qu'on ne peut trouver les ſubdiviſions de ces vaiſſeaux qui ſont pourtant, ſelon lui, entre les lames qui compoſent le Cryſtallin; néanmoins il repréſente les diviſions & les ſubdiviſions de ces vaiſſeaux, c'eſt donc par imagination: il ne dit pas un mot des vaiſſeaux de la Capſule. Il faut pourtant que ces vaiſſeaux paſſent à travers la Capſule, pour aller au Cryſtallin. Il démontre dans la Table 4, Fig. 3, 4 & 5, les vaiſſeaux qui vont à la Membrane vitrée & à l'Humeur vitrée, & ne parle point de ceux qui vont à la Capſule du Cryſtallin: ſans doute qu'elle a auſſi des vaiſſeaux, nous les avons vû. Hovius auroit dû nous repréſenter les

* *Pag.* 45. & 46. † *Page* 100.

les tiges de ces vaiſſeaux, ceux qui ſe diſtribuent dans la Capſule, & l'endroit où ils percent le Cryſtallin; mais au-lieu de cela il repréſente deux choſes qui me paroiſſent incompatibles ſur un même Cryſtallin. 1°. La ſéparation des prétendus vaiſſeaux du Cryſtallin. 2°. La ſubſtance du même Cryſtallin diviſée en lames. Que réſulte-t-il de cette Figure? Les vaiſſeaux qu'il repréſente ſont les vaiſſeaux, tels qu'il les a vu ſeringués dans la Capſule, & qu'il attribue aux lames ſupérieures du Cryſtallin. Il aura mis ce Cryſtallin dans quelque liqueur acide, ou dans l'eau bouillante, comme j'ai fait, qui étant ſeché à l'air, ſe diviſe en lames, & pour-lors ces deux choſes peuvent ſe trouver enſemble.

Après tout, il ne dit point quels ſont les Animaux dont il a employé les Yeux pour faire les obſervations, dont nous venons de parler; il devoit du moins dire le nom de l'Animal, dont il repréſente le Cryſtallin avec ſes vaiſſeaux: outre cela il ſe tient très réſervé ſur les moyens dont il s'eſt ſervi dans ſes prétendues préparations. Il ne l'eſt pas moins ſur la matiere de ſon injection, qu'il ne déclare point. A dire le vrai, tout cela m'eſt fort ſuſpect dans un Homme qui dit, * qu'il ſeroit indigne à un honnête Homme de cacher les découvertes ſur l'Humeur aqueuſe, la Vitrée & le Cryſtallin.

S'il y avoit quelque vaiſſeau qui paſſât de la Capſule dans le Cryſtallin, j'avois lieu d'eſ-

* Page 92.

d'efperer de la trouver dans les Yeux feringués ou remplis de fang, que j'ai diffequés avec toute la précaution poffible; on pourroit, & même on devroit découvrir ces vaiffeaux dans les Cryftallins des Yeux de Chevaux qui ne font point feringués, où dans les Cryftallins de gros Poiffons, mais on n'y rencontre pas la moindre fibre qui communique de la Capfule au Cryftallin; il n'y a donc aucune communication du Cryftallin avec fa Capfule, c'eft ce que M. Antoine *, le plus habile Oculifte de fon tems, avoit remarqué: d'où il conclud que *de toutes les parties de notre corps, le Cryftallin eft la feule partie qui n'a point de continuité avec fes voifines par aucune fibre ni vaiffeau.*

Je n'ai jamais trouvé cette Capfule opaque dans aucun des Yeux que j'ai diffequés, foit d'Homme, foit d'Animaux à quatre pieds, & je l'ai trouvée toujours tranfparente dans toutes les Cataractes que j'ai diffequées dans les Cadavres; & ce qu'il y a de fingulier, c'eft que la Cornée & la membrane hyaloïde trempées dans l'eau bouillante, ou dans des Efprits acides, ou dans l'Efprit de Vin, deviennent opaques prefque dans le moment qu'on les y met: néanmoins la membrane Cryftalline ne devient opaque que dans l'Efprit de Nitre, ce n'eft pas même une entiere opacité; elle fe diffout le plus fouvent dans cet Efprit, & quelquefois dans l'Efprit de Sel, & lorfqu'elle ne fe diffout point dans le dernier, elle

* *Traité des Maladies de l'Oeil, defcrip. de l'Oeil, du Cryftall. Ch.* 11.

elle y conserve sa transparence. J'ai quantité d'expériences de Crystallins de Bœuf trempés dans l'Esprit de Sel pur, la membrane est restée entiere, transparente, ferme, & se soutenoit par elle-même, quoique le Crystallin fût très opaque. Cette membrane ne se dissout point dans les autres Esprits acides, & y conserve toujours sa transparence: néanmoins tous les Crystallins que l'on met dans ces Esprits avec leur Capsule, deviennent opaques, comme je l'ai dit; il faut pour cela que la liqueur traverse cette Capsule. La même chose est arrivée aux Crystallins trempés dans les dissolutions de plusieurs sortes de Sels.

Cette membrane est extensible, comme il est facile de le remarquer par le gonflement qui lui arrive en la soufflant par une petite incision qu'on y fait exprès, je l'ai fait voir à l'Académie; puis elle se remet dans son premier état, ce qui marque son ressort qui lui est nécessaire, afin qu'elle s'étende & se resserre toutes les fois qu'il se répand de la liqueur dans sa cavité, & qu'elle se dissipe.

Quelques-uns croyent que cette Capsule comprime le Crystallin & l'applattit au moyen de la contraction des fibres qui composent le ligament ciliaire, qui étant pris pour un sphincter, & les fibres qui composent la Capsule, pour les tendons des fibres du ligament, lorsque les fibres de ce ligament ciliaire se mettent en contraction, elles tirent leurs tendons, étendent la Capsule, compriment la surface du Crystallin & l'applattissent. Mais ces fibres me paroissent bien foibles pour un

 tel

tel office, qui demande plus de force pour vaincre le reſſort du Cryſtallin ; outre cela ces fibres s'attachent obliquement de devant en derriere ſur la circonference de la Capſule, principalement dans l'Homme, ce qui la rendroit plus capable de faire avancer le Cryſtallin en devant, ſi cela ſe pouvoit ; il vaudroit mieux rapporter cet effet à l'effort des muſcles des Yeux : j'eſpere donner un Mémoire ſur cette matiere.

Cette Capſule a trois uſages. 1°. Elle retient le Cryſtallin dans le chaton de l'Humeur vitrée, ſans qu'il puiſſe changer de ſituation. L'on remarque qu'auſſi-tôt que cette membrane eſt ouverte dans le vivant par quelques coups reçus ſur l'Oeil, le Cryſtallin ſort de ſon chaton, & s'applique ſur la partie poſtérieure de l'Uvée, où il ne reſte pas longtems ſans devenir louche, puis opaque, comme l'expérience le fait voir, parce qu'il eſt gonflé par l'Humeur aqueuſe dont il s'imbibe. Cette liqueur écarte inégalement les fibres du Cryſtallin les unes des autres, les couches ne ſe trouvent plus paralleles, ce qui dérange la direction des pores pour le paſſage de la lumiere, & forme l'opacité. Il arrive la même choſe à un Cryſtallin trempé dans l'Eau commune.

2°. Cette Capſule ſépare le Cryſtallin de l'Humeur aqueuſe, & empêche qu'il ne ſoit inceſſamment baigné de cette humeur, qui en l'humectant, le feroit gonfler, comme je viens de le dire.

3°. Les vaiſſeaux lymphatiques fourniſſent une liqueur qu'ils répandent dans ſa cavité, dont

dont le Cryſtallin eſt inceſſamment humecté *. En quelque endroit que l'on perce cette Capſule à la partie antérieure ou poſtérieure, on voit ſortir ordinairement cette liqueur, après quoi la Capſule ſe flétrit, & perd ſa tenſion à proportion de la quantité de la liqueur qui s'eſt épanchée. Il arrive quelquefois qu'en perçant cette membrane à ſa partie antérieure, elle ſe fend tout auſſitôt juſqu'à la circonference: c'eſt ce que j'ai vu dans l'Oeil de la Carpe de Mer, de quelques Chats; je l'ai auſſi vu dans des Yeux de Bœuf que j'avois fait tremper dans l'eau pendant vingt-quatre heures, ce qui n'arrive que parce que le Cryſtallin eſt imbibé & gonflé de liqueur, & que pour-lors il eſt fort ſerré par ſa Capſule, qu'il déchire en ſe dilatant dans le moment qu'on fait l'ouverture. Le Cryſtallin ſe fend quelquefois lui-même par trois rayons, du centre à la circonference. Les Yeux trempés dans l'eau n'ont pas toujours leurs Cryſtallins gonflés, mais on y trouve toujours une certaine quantité de liqueur qui a pénétré toutes les membranes, & qui s'eſt introduite dans la cavité de la Capſule.

Je n'en ai jamais trouvé dans l'Homme dont la Capſule ſe ſoit déchirée après les avoir percés. L'on en rencontre même, dans ceux qui n'ont point été trempés, qui ne donne aucune liqueur. Mais la ſurface interne

* M. Antoine Maiſtrejean, dans ſon *Traité des Maladies de l'Oeil*, *Deſcription de l'Oeil*, *Chap.* 14, a dit par conjecture, qu'il y a un ſuc nourricier qui s'épanche dans la cavité de la Capſule, dont le Cryſtallin eſt tout auſſi-tôt imbibé: il ne dit point qu'il ait vu ce ſuc.

ne de cette Capſule & la ſurface externe du Cryſtallin ſe trouvent humectées, il n'y a quelquefois de liqueur que dans un œil, il n'y en a point dans l'autre, ce que j'ai trouvé auſſi dans quelques Animaux à quatre pieds.

Cette liqueur eſt claire, tranſparente & très liquide dans l'Homme, le Chien, le Chat, le Loup, le Lievre, le Lapin, le Mouton, l'Agneau, le Veau; celle que l'on trouve dans le Bœuf & le Cheval eſt viſqueuſe, & file comme l'Humeur vitrée, filtrée par le papier gris.

* M. Morgagni a trouvé cette liqueur dans la Capſule du Cryſtallin de l'Homme, du Bœuf, du Veau, dans leſquels pourtant il ne l'a pas toujours rencontrée; il ne l'a pas vûe dans les Poiſſons, mais il dit que quelques-uns l'y ont trouvée.

J'ai trouvé cette liqueur dans un ſeul Marſouin, de pluſieurs que j'ai diſſequés: je n'en ai point trouvé dans un grand nombre d'autres Poiſſons, mais la partie extérieure de leur Cryſtallin étoit très humectée, ce qui la rend très molle dans quelques Poiſſons, quoique la partie intérieure de ces mêmes Cryſtallins ſe trouve quelquefois dure comme de la Corne. J'ai encore trouvé cette liqueur dans le Dindon & le Canard.

Généralement parlant, plus les Cryſtallins ſont gros, plus on trouve de cette liqueur; néanmoins on en trouve dans les Lapins & les Lievres, davantage que dans le Mouton qui a le Cryſtallin plus gros. Je n'ai jamais trouvé le Cryſtallin du Lapin & du Lievre ſans cette liqueur.

Pour

* *Adverſ. 6. p. 90.*

Pour trouver, avec autant de précision qu'il est possible, la quantité de cette liqueur, il faut tirer de l'Oeil le Crystallin avec sa Capsule, le peser dans une balance qui puisse trébucher du moins à un demi-grain, après quoi il faut ouvrir la Capsule du Crystallin à sa partie antérieure & postérieure avec une Lancette ou un Scalpel très fin, en faire sortir la liqueur par une legere pression, & l'imbiber avec une éponge, afin qu'il ne reste que le moins qu'il est possible, dessus & dedans la Capsule, dont il ne faut point dépouiller le Crystallin, puis le peser. La diminution du poids fera connoitre la quantité de liqueur contenue dans la Capsule. C'est de cette maniere que j'ai trouvé que la Capsule du Crystallin de l'Homme en contenoit un demi-grain, lorsqu'il s'y en est rencontré; j'en ai trouvé jusqu'à un grain dans les Yeux que j'ai mis tremper dans l'eau pendant vingt-quatre heures.

J'en ai trouvé au plus un grain & demi dans les Yeux du Chien-dogue: deux grains dans ceux du Mouton.

Le Lapin & le Lievre en contiennent jusqu'à 2 grains & demi: le Bœuf en a au plus 4 grains, & j'en ai trouvé jusqu'à 12 grains dans quelques Yeux de Chevaux.

J'ai voulu faire des expériences sur cette liqueur: il n'y a pas moyen de la faire sur celle de l'Homme, je n'ai pu en ramasser un seul grain de dix-huit Yeux; le peu qu'il en a ne peut se rassembler pour former une goutte, & ne se détache pas du Crystallin & de sa Capsule. On ne peut non plus en rassem-

bler

bler aſſez dans les Yeux de Mouton pour faire une ſeule expérience; car en ſuppoſant que tous les Yeux de Mouton contiennent chacun 2 grains de cette liqueur, on pourroit au plus en retirer un grain de chacun, il faudroit du moins dix-huit ou vingt Yeux pour en réunir aſſez pour faire une expérience; mais on ne trouveroit peut-être qu'un de ces Yeux qui contiendroit 2 grains de cette liqueur, & il s'en trouveroit beaucoup qui n'en contiendroient pas un grain & demi, on n'en trouve quelquefois qu'un grain: ainſi de quarante ou cinquante Yeux de Mouton, à peine en trouveroit-on aſſez pour faire une ſeule expérience. J'ai donc été obligé de me ſervir de la liqueur que l'on trouve dans la Capſule du Cryſtallin des Yeux de Bœufs & de Chevaux, qui, comme je l'ai dit, file & contient beaucoup de parties viſqueuſes capables de produire plus de coagulum & de précipité que celle de l'Homme & de quelques Animaux.

J'ai mêlé de cette liqueur avec l'Eſprit de Sel, le mélange eſt devenu blanc, après quoi il s'eſt fait un précipité blanc; elle s'eſt moins troublée avec l'Eſprit de Vitriol.

Il ne s'eſt fait aucun changement avec l'Eſprit de Nitre, ni avec l'Huile de Vitriol. Il s'eſt pourtant trouvé de cette liqueur cryſtalline qui s'eſt troublée avec l'Eſprit de Nitre & de Vitriol, comme il s'en eſt trouvé qui ne ſe ſont point troublé avec l'Eſprit de Sel & de Vitriol, mais rarement.

Cette liqueur a deux uſages, 1°. elle empêche

pêche que le Cryſtallin ne ſe deſſeche; 2°. elle lui fournit ſa nourriture.

Le Cryſtallin ne peut ſe deſſecher pendant qu'il eſt humecté de cette liqueur, mais auſſitôt qu'elle lui manque, il devient ſec, dur & opaque, & peut ſe mettre en poudre; c'eſt ce que j'ai vu pluſieurs fois ſur des Cadavres : j'en ai donné une obſervation à M. Briſſeau, qu'il a inſeré dans ſon Traité de la Cataracte & du Glaucome. Cet accident arrive à la ſuite d'une inflammation qui pénétre juſqu'au ligament ciliaire, & qui a ſuppuré. Les vaiſſeaux qui compoſent le ligament ciliaire ſe détruiſent, & ce ſont ces vaiſſeaux qui fourniſſent non-ſeulement l'humeur aqueuſe, mais encore la liqueur qui ſe répand dans la Capſule du Cryſtallin, & qui eſt chariée par les vaiſſeaux qui partent du ligament, & ſont ramefiés dans la partie antérieure de la Capſule, & peut-être auſſi dans ſa partie poſtérieure.

L'Humeur aqueuſe n'étant plus fournie, à meſure qu'elle ſe diſſipe, les membranes ſe reſſerrent, le Cryſtallin eſt pouſſé en devant avec ſa Capſule ſur la partie poſtérieure de l'Uvée où elle ſe colle. Mais le Cryſtallin n'étant plus humecté par ſa propre liqueur cryſtalline, ſe deſſeche, & s'attache à la ſurface interne de la Capſule, & voilà ce qui a fait le fondement de toutes les Cataractes membraneuſes, comme je le dirai dans mon Mémoire de la Cataracte; c'eſt de-là auſſi que quelques Anatomiſtes ont déduit l'opacité de la Capſule *, parce que lorſqu'on a retiré

* *Hiſt. de l'Ac.* 1722. *p.* 22.

tiré cette Capſule de l'Oeil, on la trouve opaque & épaiſſe; mais ils n'ont pas pris garde qu'elle n'eſt épaiſſe que parce qu'il reſte ſur cette Capſule un peu de matiere du Cryſtallin ſeche & opaque: ſi l'on prend le ſoin de la mettre dans l'eau, comme j'ai fait, pour détremper cette matiere, on la ſépare facilement de la Capſule que l'on trouve dans ſon épaiſſeur & ſa tranſparence naturelle.

Cette liqueur ſert encore de nourriture au Cryſtallin, qui, ſelon toute apparence, ne ſe nourrit pas de la même maniere que toutes les autres parties de notre corps, puiſque nous n'avons trouvé aucuns vaiſſeaux qui communiquent de la membrane dans le Cryſtallin.

Il ſemble que cette liqueur étant épanchée dans la cavité de la Capſule, & qui environne de tous côtés le Cryſtallin, peut le nourrir de l'une des deux manieres ſuivantes. La premiere eſt qu'elle pénétre le Cryſtallin dans toute ſa ſubſtance, & pour-lors il ſe fait une application de cette liqueur dans toutes les fibres du Cryſtallin: c'eſt le ſentiment de M. Antoine, il dit que le Cryſtallin eſt nourri par imbition.

La ſeconde eſt que la partie la plus ſéreuſe de cette liqueur s'imbibe dans la ſubſtance du Cryſtallin, & y va entretenir la tranſparence, pendant que la partie la plus viſqueuſe reſte ſur la ſuperficie du Cryſtallin & s'y unit, en y formant une couche; ce qui eſt d'autant plus vraiſemblable, que tous les Cryſtallins ſe trouvent formés par ces ſortes de couches. D'ailleurs il n'y a point de doute que le Cryſtallin

ne puisse s'imbiber de la liqueur qui l'environne. Il en est quelquefois si gonflé dans certains Animaux, qu'il se fend en trois rayons du centre vers la circonference, aussi-tôt qu'on le tire de sa Capsule, comme je l'ai dit ci-dessus.

OBSERVATION

DE L'ECLIPSE DU SOLEIL,

Faite à son lever, le 15 Juillet de cette année 1730.

Par M. CASSINI *.

LE Soleil devant paroitre éclipsé le 15 Juillet de cette année 1730, à son lever, nous observames, la veille, l'endroit de l'horizon où il commençoit à paroitre, afin de choisir pour notre Observation un lieu où on le pût voir commodément, sans qu'il fût couvert par les Maisons ou Eglises qui sont, à l'égard de l'Observatoire, dans la partie de l'horizon qui est entre le Nord & l'Est où on devoit l'appercevoir; & nous observames le commencement de son lever à $4^h\ 9'$.

Le matin du 15 je dressai une Lunette de 8 pieds, garnie de mon Micrometre à réticules, au point de l'horizon où je l'avois vu la veille. Il étoit couvert en partie de nuages, en-

* 15 Juillet 1730.

entre lesquels on voyoit cependant quelques endroits clairs, ce qui faisoit esperer qu'on pourroit en faire quelques Observations.

Le Soleil commença à poindre sur l'horizon à 8^h 9', mais il entra dans un nuage étroit, dont il sortit quelques minutes après, & à 9^h 15' 10" il parut assez distinctement éclipsé dans sa partie inférieure d'environ 3 doigts, à ce que je pus juger; car ayant essayé de mesurer la quantité de l'Eclipse avec le Micrometre, dont les fils extrêmes comprenoient le diametre horizontal du Soleil, je trouvai que son diametre vertical étoit beauboup plus petit, ce qui est l'effet ordinaire de la réfraction. Je fus donc obligé de mesurer l'intervalle entre un fil parallele qui passoit par les deux cornes & le fil qui touchoit la concavité de l'Eclipse que je trouvai d'un doigt six minutes, dont le double, supposé le diametre du Soleil égal à celui de la Lune, dont il ne differoit pas sensiblement, mesure la quantité de l'Eclipse, qui étoit par conséquent de deux doigts douze minutes.

Cette quantité de l'Eclipse doit être augmentée dans le rapport du diametre horizontal au diametre vertical, qui, comme on l'a dit, étoit diminué par l'effet de la réfraction.

Le Soleil entra ensuite dans un nuage, dont il ne sortit que quelques minutes après, & à 9^h 27' 20" je jugeai la grandeur de l'Eclipse d'un doigt, à 9^h 29' 18" d'un demi-doigt, à 9^h 30' 18" d'un tiers de doigt, & je determinai sa fin avec assez d'évidence à 4^h 32' 28".

M. Maraldi, qui a fait cette Observation dans

dans un autre Appartement avec le Micrometre ordinaire, détermina la fin de l'Eclipse à $4^h\ 32'\ 26''$.

Cette Eclipse doit avoir paru plus grande dans les Païs Orientaux où le Soleil s'est levé sur l'horizon plutôt qu'à Paris. On en peut voir le détail dans les Ephémérides de M. Manfredi, qui a marqué pour Paris la grandeur de l'Eclipse de 3 doigts 17 minutes à son lever, qui devoit arriver à $4^h\ 12'$, & la fin à $4^h\ 32'$, à quelques secondes près de celle que nous avons déterminée.

REGLES

POUR

CONSTRUIRE DES THERMOMETRES DONT LES DEGRÉS SOIENT COMPARABLES,

Et qui donnent des idées d'un Chaud ou d'un Froid qui puissent être rapportés à des mesures connues.

Par M. DE REAUMUR *.

LEs Thermometres sont sans contredit une des plus jolies inventions de la Physique moderne, & une de celles qui a le plus contribué à ses progrès. Ils nous ont valu un grand

* 15 Nov. 1730.

grand nombre de connoiſſances curieuſes, qu'on n'eût pu ſe promettre ſans leur ſecours. Combien y a-t-il de cas où ſans les Thermometres nous ne ſerions pas parvenus à ſavoir que des liqueurs mêlées enſemble s'échauffent? Sans les Thermometres nous n'aurions jamais découvert que certains Sels, en ſe fondant dant l'eau, la refroidiſſent; qui ſont ceux qui la refroidiſſent le plus. Nous ne ſaurions point qu'il y a de la Glace plus froide que d'autre Glace. Nous ignorerions que l'Eau qui bout, a acquis le plus grand degré de chaleur qu'elle puiſſe prendre, un degré au-delà duquel il n'eſt plus poſſible de l'échauffer. Enfin les Phyſiciens ſavent qu'une infinité d'expériences demandent à être faites le Thermometre à la main. Cet inſtrument même n'eſt pas à leur ſeul uſage; il n'eſt pas reſté renfermé dans leurs ſeuls Cabinets; généralement on aime à conſulter le Thermometre ſur la temperature de l'Air; & c'eſt ſur-tout lorſque le froid ou le chaud nous deviennent incommodes, qu'on aime à le conſulter: pendant les rudes froids de l'Hyver, pendant les chaleurs accablantes de l'Eté, dans les converſations ordinaires, chacun rend volontiers compte des degrés dont ſon Thermometre eſt deſcendu ou monté.

Mais ſi on ſait combien cet inſtrument eſt amuſant & utile, on ſait auſſi combien il eſt encore imparfait. Les marches de preſque tous les Thermometres ſont differentes; quoiqu'expoſés au même air, la liqueur des uns monte plus haut, ou deſcend plus bas que celle des autres, pour marquer les mêmes augmentations & les mêmes diminutions de cha-

chaleur. Le changement de temperature d'air qui sera marqué sur l'un par quatre ou cinq degrés, sera marqué sur l'autre par sept à huit, par deux ou trois, ou par tout autre nombre de degrés; & on ne connoit point les rapports qui sont entre les degrés de differens Thermometres. Les manieres dont ils s'expriment, s'il est permis de parler de la sorte, étant toutes differentes, on n'entend que la langue d'un Thermometre qu'on a suivi pendant plusieurs années, on n'entend nullement celle de tout autre. Aussi les Thermometres ne nous ont-ils encore presque de rien servi pour nous donner des connoissances du plus grand degré de froid & du plus grand degré de chaud des differens climats, qui seroient pourtant des connoissances utiles & curieuses. Nous aimerions à savoir jusqu'à quel point des hommes, tels que nous, peuvent soutenir le froid ou le chaud. Il seroit important de connoitre à peu près la temperature de l'air qui est nécessaire pour faire croître des Plantes & des Arbres qui, quoiqu'ils ne s'élevent pas actuellement dans notre Païs, pourroient peut-être s'y naturaliser.

Non seulement on n'entend pas la langue des differens Thermometres, chacun même n'entend que très confusément celle du sien. On sait les termes où il a marqué le plus grand chaud, ou le plus grand froid, on sait le nombre des degrés qui les séparent; mais ni aucun degré en particulier, ni tous ces degrés ensemble, ne nous rappellent aucune idée de véritable mesure.

Les

Les causes d'où naissent les défauts des Thermometres, ne sont pas moins connues que les défauts eux-mêmes; aussi seroit-il très inutile de les rappeller ici, s'il ne convenoit de les avoir présentés, pour juger si les expédiens, auxquels j'ai cru qu'il falloit avoir recours, sont capables de produire tout ce que j'en ai esperé.

Les Thermometres sont des instrumens de Physiciens, les Physiciens ont été interessés à les perfectionner; ils y ont travaillé; ils en ont imaginé de plusieurs figures differentes; ils en ont rempli de differentes liqueurs. Pour l'ordinaire, on s'est servi d'Esprit de Vin. C'est l'air qu'on a fait agir dans plusieurs Thermometres; dans quelques-uns l'air, en se dilatant, n'a eu à faire mouvoir que de l'Esprit de Vin; dans d'autres il a eu à faire mouvoir une colomne de Mercure.

Nous n'avons garde d'entreprendre d'expliquer ici toutes les differentes constructions de Thermometres qu'on a imaginées, ce seroit la matiere d'un assez long Ouvrage; d'ailleurs, nous n'avons besoin actuellement que de la plus simple construction, & une des plus anciennes, & aussi de celle qui a prévalu, je veux dire de celle du Thermometre qu'on a appellé le *Thermometre de Florence*, qui est celui qu'on voit journellement partout. Il consiste dans une Boule creuse de verre, scêllée à un long & délié Tuyau de verre, dont le bout supérieur est scêllé hermétiquement. On sait de reste que la Boule & partie du Tuyau sont remplis d'un Esprit de Vin coloré de rouge; que quand la chaleur

leur de l'air, qui environne le Thermometre, augmente, que l'Esprit de Vin, contenu dans la Boule se dilate, qu'il est forcé de s'élever plus haut dans le Tuyau; qu'au contraire la même liqueur descend dans le Tuyau, lorsqu'elle perd de sa chaleur.

Ce Tuyau de verre est assujetti sur une Planche mince, couverte d'un Papier, sur lequel les degrés sont imprimés. Des Papiers semblablement imprimés, ou gravés, servent pour des Thermometres differens, comme si les étendues de leurs degrés devoient être les mêmes.

Il suit cependant de cette construction, & on le sait assez, que pendant qu'il se fait quelque changement dans la temperature de l'air, que la liqueur parcourt plus ou moins de chemin dans differens Thermometres, soit en montant, soit en descendant, selon que le diametre de la Boule contient plus ou moins de fois celui du Tuyau. De-là vient que certains Thermometres sont peu-sensibles, & que d'autres au contraire le sont trop; que faute de place pour recevoir la liqueur, le Tuyau ou la Boule de ces derniers sont quelquefois brisés par l'effort qu'elle fait pour se dilater, & que dans de pareils Thermometres la liqueur rentre quelquefois dans la Boule avant que le froid soit devenu excessif. Que de-là vient enfin qu'il est impossible de trouver des Thermometres dont les marches soient les mêmes ou proportionnelles, parce que quelque chose qu'on fasse, il est presque impossible de parvenir à avoir deux Boules de verre d'égal diametre, &

d'une même rondeur; car ces Boules ne ſont jamais des Boules parfaites. Il n'eſt pas plus facile d'avoir des Tuyaux de diametres déterminés. D'ailleurs ils ſont preſque toujours plus gros à un bout qu'à l'autre, & aſſez conſiderablement; leur intérieur a ſouvent des inégalités dont on ne ſauroit juger par dehors. Tout cela enſemble va plus loin qu'on ne l'imagineroit; par des meſures exactes, j'ai quelquefois trouvé que de deux portions d'un même Tuyau, égales en longueur, & qui ſur un Thermometre auroient été priſes pour des degrés égaux, l'une contenoit près du double de la liqueur contenue dans l'autre.

Mais ſuppoſons que, malgré ces difficultés invincibles, on ſoit parvenu à ſavoir adapter aux Boules, des Tubes dont les diametres ſoient aux leurs dans une proportion conſtante, & celle qui a été trouvée la meilleure; ce n'en ſera pas encore aſſez pour avoir des Thermometres qui ayent les mêmes allures, ou des allures proportionnelles, c'eſt-à-dire, qui dans les mêmes changemens de temperature d'air donnent le même nombre de degrés. Il y a encore une autre ſource de differences à laquelle on ne ſemble pas avoir aſſez pris garde, du moins ne ſai-je point qu'on ait cherché à y apporter de remede. C'eſt la qualité de la liqueur, dont on remplit la Boule du Thermometre. Il s'en faut bien que toutes les liqueurs ſe dilatent également à un même degré de chaleur. On ne l'ignore pas, & on a choiſi par préférence l'Eſprit de Vin pour la liqueur des Thermometres, par-

parce qu'il eſt peut-être celle qui eſt la plus ſenſible aux impreſſions du froid & du chaud, ſi on excepte l'Air. L'Eſprit de Vin eſt beaucoup plus dilatable que l'Eau. L'Eſprit de Vin le plus rectifié n'eſt pourtant qu'un mêlange d'une matiere inflammable, d'une Huile eſſentielle ou éthérée, avec de l'Eau; l'Eau fait la meilleure portion de ce mêlange. La grande *dilatabilité* de l'Eſprit de Vin, s'il m'eſt permis de me ſervir de ce terme commode, & dont j'aurai beſoin plus d'une fois, eſt donc dûe à l'Huile éthérée qu'il contient; plus il y en aura dans de l'Eſprit de Vin, & plus il ſera dilatable; c'eſt-à-dire, que les Eſprits de Vin les mieux rectifiés ſe dilateront davantage, pendant la même augmentation de la chaleur de l'air, que ceux qui le ſont moins. Dans deux Thermometres, égaux dans tout le reſte, & chargés auſſi chacun d'une quantité égale, mais d'un different Eſprit de Vin, la liqueur ne s'élevera, ni ne s'abaiſſera également; ils exprimeront differemment les changemens de chaud & de froid. Or, non-ſeulement on n'a pas cherché juſqu'ici à remplir les Thermometres avec un Eſprit de Vin, d'une qualité déterminée & connue, on s'eſt ſervi indifferemment de ceux qui ſe ſont préſentés. Les faiſeurs de Thermometres ordinaires ſe contentent ſouvent d'employer une ſorte d'Eſprit de Vin très foible, une eſpece d'Eau-de-vie.

M. Amontons a négligé d'être auſſi exact qu'il a coutume de l'être, lorſqu'il a parlé de la raréfaction de l'Eſprit de Vin, & de celle de l'Eau-de-vie; il en a parlé comme ſi tou-

tes les especes d'Esprits de Vin, & comme si toutes les especes d'Eaux-de-vie devoient, chacune dans leur genre, donner sensiblement les mêmes raréfactions : il n'est pas même le seul Physicien qui se soit exprimé ainsi. Il est pourtant essentiel, pour comparer les effets du chaud & du froid sur differens Thermometres, qu'ils soient remplis d'une même liqueur, ou de deux liqueurs dont les rapports des degrés de dilatabilité soient connus ; & c'est ce qu'on n'a point du tout cherché à déterminer, & ce que nous tâcherons de faire dans la suite de ce Mémoire. On y verra que cette source d'erreurs peut rendre le nombre des degrés d'un Thermometre presque double de celui d'un autre, exposé au même air.

Cet inconvénient n'est peut-être pas moins grand dans les Thermometres dont le jeu est produit par l'Air qui y est renfermé, que dans ceux qui ne renferment que de l'Esprit de Vin ou toute autre liqueur. Pour peu qu'on y pense, on ne sera pas disposé à croire que l'Air de toutes saisons, de tous Païs, pris à un égal degré de chaud, soit également dilatable. L'Air n'est nulle-part un fluide, ou liquide pur. Dans un même volume d'Air, il y a plus ou moins d'Air, selon qu'il est plus chargé d'exhalaisons ou de vapeurs ; & des expériences ont appris qu'un peu d'eau en vapeurs, mêlée avec l'Air, est capable d'augmenter considerablement les grandes dispositions qu'il a à se raréfier.

Enfin, quoiqu'on employât une liqueur, dont les rapports de dilatabilité seroient connus,

nus, ce ne feroit pas encore assez: les liqueurs n'ont point de volumes constans, ceux des solides ne le sont pas non plus, mais ils ne varient ni si considerablement ni si subitement, que ceux de certaines liqueurs; elles passent continuellement d'un degré de dilatation à un ou à plusieurs autres, & reviennent ensuite à des degrés de condensation, selon l'état de l'Air qui agit sur elles. Or entre ces degrés de dilatation ou de condensation dont est susceptible la liqueur qu'on veut renfermer dans le Thermometre, il en faut trouver un qui soit sensible, qu'on puisse avoir en tout Païs, & qui soit le terme d'où l'on commence à compter les degrés, ou auquel on finisse de les compter. La belle proprieté que M. Amontons a découverte à l'Eau, celle de n'être plus capable de s'échauffer lorsqu'elle a commencé à bouillir, donne un de ces termes, un de ces degrés de dilatation qu'on peut avoir en tout tems, & qui sont les mêmes par-tout. Il a aussi cherché à se servir de cette proprieté de l'Eau, pour construire des Thermometres qui donnassent des degrés qui pussent être constans en tout Païs. L'usage qu'il en a fait est plein d'adresse: il s'est servi d'Air, qu'il a chargé de Mercure; au moyen de l'eau bouillante il a dilaté cet Air, qui, en se dilatant, a élevé le Mercure à un point qui a été un point fixe pour M. Amontons. Ces Thermometres à Air & à Mercure ont servi à en graduer d'autres à Esprit de Vin. Mais les differences qui sont dans l'Air, pris en differens tems, en differentes saisons, en differens

Païs, ne me permettent pas de croire que les premiers Thermometres ſoient propres à produire les effets qu'on en a eſperé. Si quelques-uns de ceux qui ont voulu répéter les expériences de M. Amontons ſur la dilatation de l'air chargé de differens poids, n'ont pas trouvé les mêmes réſultats qu'a eus cet exact Académicien, c'eſt peut-être qu'ils les ont faites ſur un Air different de celui qui a ſervi à ſes épreuves. Au ſurplus, cet inconvénient n'eſt pas le ſeul qui puiſſe empêcher ce Thermometre de répondre parfaitement aux vues ingénieuſes de ſon Inventeur. L'état moyen de chaleur qu'il veut à l'Air, & qu'il ne détermine que d'une maniere vague, la difficulté de trouver des Boules & des Tubes de capacités égales, ou proportionnelles, difficulté bien grande à ſurmonter dans la pratique; l'augmentation qui ſurvient au volume de l'Air, qui affoiblit ſa force de reſſort, & qui ne la laiſſe pas telle qu'elle devroit être pour produire l'effet dont elle eſt la cauſe, & la meſure; en un mot, bien d'autres difficultés ſur leſquelles il ſeroit long d'inſiſter, comme les differentes réductions qu'il faut faire des peſanteurs variables de l'Atmoſphere, font que ce Thermometre n'eſt pas ſuſceptible de toute la préciſion qu'on lui deſireroit. Auſſi un Auteur Italien a avancé depuis peu*, & a tâché de prouver, que le Thermometre de M. Amontons eſt inférieur à celui de Florence; c'eſt aſſurément le dégrader beaucoup trop, quoiqu'il ſoit vrai que l'uſage de l'ancien prévaut, mais ce n'eſt que parce que l'autre eſt très difficile à conſtruire.

Il

Il s'en faut bien que j'aye rien pensé sur cette matiere d'aussi ingénieux que ce qu'a imaginé M. Amontons. Tout ce que j'ai à proposer est extrêmement simple, mais je le crois propre à nous donner des Thermometres qui se fassent entendre continuellement, & en tout Païs. J'explique d'abord le plan que j'ai cru devoir suivre, & j'expliquerai ensuite ce que j'ai fait pour le mettre en pratique.

Je m'en tiens à une liqueur très dilatable, c'est-à-dire, à l'Esprit de Vin; mais comme il est une infinité d'especes d'Esprits de Vin, j'en choisis une par préférence qu'on puisse avoir commodément en tout tems, & en tout Païs. J'établis des caracteres pour reconnoître cette espece d'Esprit de Vin, propres à empêcher de la confondre avec toute autre, & à déterminer de combien elle en differe.

Je réduis l'Esprit de Vin choisi, & caractérisé, à un volume connu de dilatation. Je le pourrois par le moyen de la chaleur de l'Eau bouillante, en usant de quelques précautions dont je parlerai dans la suite: mais j'aime mieux me servir de la congélation artificielle de l'Eau, c'est-à-dire, de l'Eau qu'on fait geler; M. Amontons lui-même s'en est servi. Le degré de dilatation, ou, si l'on veut, de condensation, auquel cette glace réduit l'Esprit de Vin, peut être regardé comme un terme fixe, & aisé à avoir dans presque tous les Païs du monde où on sait faire usage des Thermometres. Quoique l'Hiver nous fasse voir de la glace plus froide que d'autre glace, il n'en sera pas plus difficile d'établir, soit

par des raiſonnemens clairs, ſoit par des expériences, que le degré de froid de la glace artificielle, le commencement de la congélation de l'Eau, eſt un degré conſtant, & tel qu'il nous le faut.

Le caractere de l'Eſprit de Vin étant bien déterminé, l'Eſprit de Vin ayant été réduit à un volume qui donne un terme faiſiſſable, tout ce qui reſte à faire eſt de graduer les differens Thermometres, de façon que leurs marches ſoient les mêmes ou proportionnelles, malgré les differens rapports qui peuvent ſe trouver entre les diametres des Boules & ceux des Tuyaux, malgré les formes irrégulieres que peuvent avoir les Boules, & malgré les inégalités qui peuvent ſe rencontrer dans les Tuyaux; & de les graduer de façon que les mêmes degrés, dans les Thermometres differens, ſoient les mêmes meſures de froid, ou de chaud; & que ces meſures donnent quelques idées, car les degrés ordinaires n'en donnent point. Ils m'apprennent bien, par exemple, que la liqueur a monté de deux ou trois pouces, mais ils me laiſſent abſolument ignorer le changement qui s'eſt fait dans le volume de la liqueur pendant qu'elle s'eſt élevée de deux ou de trois pouces. On auroit, ce me ſemble, tout ce qu'on peut deſirer, ſi chacun des degrés donnoit une idée préciſe des degrés de dilatation, ou de condenſation de la liqueur, car l'effet de l'augmentation de chaleur eſt l'augmentation de volume. Comment peut-on mieux meſurer les degrés de chaleur qui s'ajoutent ſucceſſivement les uns aux autres, que par des degrés qui expriment

les

les portions, dont le volume s'est successivement renflé, qui en donnent une idée claire? Je m'explique: la quantité d'Esprit de Vin que je fais entrer dans mon Thermometre m'est connue, je connois le nombre de certaines parties aliquotes dont elle est composée; par exemple, le volume de ma liqueur condensée par la glace artificielle contient 500 parties; que ces parties soient chacune de 10, de 20, &c. lignes cubiques, il n'importe, pourvu que j'en aye la mesure. Je marque sur le Tuyau de mon Thermometre jusqu'où va ce volume de liqueur, composé de 500 parties, lorsqu'il est condensé par la glace artificielle *; c'est au-dessus & au-dessous de ce terme que je vais marquer les degrés. Mais au-lieu de prendre, pour chaque degré, des parties du Tuyau égales entre elles en longueur, comme elles le sont dans les Thermometres ordinaires, je détermine chacun des degrés de façon qu'il est une portion du Tuyau qui contient une des parties du volume de liqueur qui a été déterminé. Dans notre cas, par exemple, où ce volume étoit de 500 parties, chaque degré sera $\frac{1}{500}$ partie de ce volume; & c'est en pareilles parties, en pareils degrés, que le Tuyau est entierement gradué. Exposons aux impressions de l'Air des Thermometres ainsi construits: les changemens qui y seront exprimés, le seront en expressions intelligibles, qui nous donneront des idées déterminées, au-lieu des idées vagues que les autres Thermometres nous don-

* Fig. 1. *CC*.

donnent. Que la liqueur s'éleve de 1, 2, 3, ou, ſi l'on veut, de 20 degrés au-deſſus du terme marqué par la congélation de l'eau : cela ſignifiera que le volume qui étoit 500, eſt devenu 501, 502, 503, ou ſi l'on veut, 520. Quand je ſaurai que la liqueur s'eſt élevée de 20 degrés, je ſaurai que ſon volume eſt augmenté de $\frac{20}{500}$ ou d'un $\frac{1}{25}$. Si au contraire le froid a fait deſcendre la liqueur de 10 degrés au-deſſous du terme marqué, je ſaurai que le froid l'a condenſée, ou a diminué ſon volume de $\frac{1}{50}$. Ainſi dans toute leur marche, les Thermometres donneront des idées préciſes des changemens qui ſe ſont faits dans un volume connu d'une liqueur connue. Alors on s'entendra, lorſqu'on comparera les degrés où eſt monté le Thermometre dans une ſaiſon, avec ceux où il eſt deſcendu dans une autre ; lorſqu'on comparera les obſervations faites en differens Païs ſur differens Thermometres conſtruits ſur ces principes.

Il ne me ſemble pas qu'on puiſſe demander aux Thermometres quelque choſe de plus, que ce que la conſtruction que nous venons de leur ſuppoſer leur donne ; mais il pourra paroitre difficile de les conſtruire ſur ces principes, de leur donner la graduation dont nous venons d'expliquer les avantages. Le moyen d'y réuſſir eſt pourtant bien ſimple, ou plûtôt très groſſier. Il eſt néanmoins certain que ſi l'on veut abſolument d'auſſi petits Thermometres que ceux qui ont été en uſage juſqu'ici, qu'il n'eſt gueres poſſible de graduer leurs Tuyaux en meſures exactes qui ſoient des por-

portions du volume de la liqueur qu'on a renfermée. Mais pourquoi s'en est-on tenu jusqu'ici à les faire tous si petits? Il y a grande apparence que c'est parce qu'on a continué de les faire tels qu'ont été les premiers. Sanctorius, leur Inventeur, vouloit que ses malades pussent tenir commodément leurs Boules dans la main. Il est arrivé aux Thermometres, ce qui seroit arrivé aux Horloges si on eût commencé par de petites Montres, & qu'on n'eût cherché qu'à perfectionner des Horloges d'un si petit voulume; on n'auroit jamais eu des mesures exactes du tems, jusqu'à ce que quelqu'un eût proposé qu'outre les Horloges qu'on est bien aise de porter sur soi, on en construisît qui restassent toujours dans les Apartemens; qu'alors on parviendroit à en avoir dont les mouvemens seroient règlés avec une précision qu'on ne pouvoit se promettre de donner aux Montres. Les Barometres devoient aussi nous faire penser à prendre pour les Thermometres de plus gros Tubes que ceux dont on se sert ordinairement. Les Barometres simples ne valent rien, lorsqu'ils sont faits de Tubes presque capillaires, tels que le sont la plupart de ceux des Thermometres.

Aussi parviendra-t-on à faire d'excellens Thermometres, dès qu'on employera des Tuyaux de verre d'une grosseur suffisante; & elle le sera, pourvu que leur diametre égale celui des gros Barometres, c'est-à-dire, pourvu qu'ils ayent intérieurement 2 lignes $\frac{1}{2}$ ou 3 lignes de diametre; on pourra pourtant en employer de plus petits, mais

leur conſtruction n'en ſera que plus aiſée & plus ſûre ſi leurs diametres ſont encore plus grands, s'ils vont juſqu'à 3 lignes $\frac{1}{2}$, les groſſeurs des Boules ſeront augmentées proportionnellement.

Il eſt vrai que des Boules & des Tuyaux, des diametres dont nous les demandons, ne feront pas d'auſſi jolis inſtrumens que le ſont les Thermometres ordinaires. Si les Aſtronomes ne vouloient ſe ſervir que de jolis Quarts de cercle, il faudroit qu'ils renonçaſſent à en avoir qui leur donnaſſent des meſures exactes. D'ailleurs ſi on ne veut faire faire aux nouveaux Thermometres que le chemin que font les anciens, ſi on ne veut point que le degré de chaleur de l'eau bouillante y ſoit marqué, la longueur des nouveaux Tuyaux excedera peu celle des Tuyaux ordinaires; la groſſeur de leurs Boules ne deviendra pas aſſez conſiderable pour être difforme, ni pour être embarraſſante; la groſſeur du Tuyau n'a rien de deſagréable: or, pendant que la capacité des Tuyaux égaux en longueur croît comme les quarrés des diametres, celle des Boules croît comme les cubes de leurs diametres. Des Boules qui auront environ 4 pouces $\frac{1}{2}$ de diametre, adaptées à des Tuyaux dont le diametre intérieur ſoit à peu près de 3 lignes, ſuffiront pour des Thermometres bons & ſenſibles.

Perſuadé qu'on paſſera ſans peine ſur la petiteſſe des Thermometres ordinaires, pour en avoir de meilleurs, je vais décrire comment il faut graduer & remplir nos grands Thermometres. Des expériences que j'ai faites des procedés que j'ai à rapporter, m'ont ap-

appris qu'ils sont plus aisés, & moins longs à mettre en pratique, qu'ils ne le paroitront dans l'explication que j'ai à en donner. Je suppose que j'aye une Boule d'un diametre convenable, ou à peu près, scêllée à un Tuyau de grosseur suffisante *. Toutes les Verreries fourniront des Tuyaux, tels qu'il les faut: celle qui s'est établie depuis quelque tems à Seve est extrêmement commode, pour y faire faire tout ce qu'on a besoin dans ce genre; c'est celle à qui je me suis adressé.

Comme le Thermometre doit être construit la mesure à la main, la plus grande affaire est de se fournir de differentes mesures. Il en faut de très petites, qui sont celles qui donnent les dernieres divisions du volume de la liqueur qu'on veut faire entrer dans le Thermometre; ce sont celles-là même qui servent à marquer l'étendue de chaque degré du Tube. Il en faut aussi de grandes, qui contiennent les unes 25, les autres 50, & d'autres jusqu'à 100 des plus petites mesures. L'usage de ces grandes est d'abreger l'operation. Chacune des petites mesures est telle, qu'elle contient seulement la quantité de liqueur qui peut occuper deux, ou trois, ou quatre lignes de hauteur dans le Tube. Tout cela est indifferent, & fait seulement que chaque degré a plus ou moins d'étendue, ce qui est arbitraire, & ne change rien dans la marche du Thermometre, & dans le rapport exact qu'elle doit avoir avec celle de tout Thermometre construit sur les mêmes principes.

Mais

* Fig. 1. A.

Mais la forme de la mesure est essentielle : j'ai choisi celle d'une sorte de petit Instrument assez connu des Physiciens. * Il est fait d'une portion d'un petit Tuyau de verre qu'on a renflé au milieu en espèce de figure d'olive †, & dont les deux bouts ont été tirés en Tuyaux extrêmement déliés, & véritablement capillaires ‡. En un mot, les Tuyaux qui aboutissent, de part & d'autre, à la partie renflée, sont si petits, qu'une goutte de liqueur y occuperoit l'étendue de plus d'un pouce. Leur longueur est arbitraire, 15 à 16 lignes suffisent à chacun de ces petits Tuyaux, ils peuvent avoir chacun plus de deux pouces. Il y a deux manieres de remplir ce petit Instrument, l'une & l'autre également sûres. La premiere est de poser un de ses bouts dans liqueur, & de sucer par l'autre bout, qu'on tient dans la bouche, jusqu'à ce qu'on sente que la liqueur vient mouiller la langue ; l'autre est d'enfoncer la mesure dans la liqueur jusqu'au dessus du renflement, bientôt elle s'éleve à l'extrémité supérieure du Tuyau capillaire. On bouche le bout supérieur de ce Tuyau avec le doigt, ou plus surement encore avec la langue, ainsi on retire du vase la mesure pleine de liqueur, sans qu'il s'écoule une goutte de celle qu'elle a reçue. Avec cette mesure j'en remplis de plus grandes ; chacune de celles-ci consistent en une Boule de verre, de diametre plus ou moins grand, adaptée à un Tube assez gros, de 4 à 5 pouces de longueur

* Fig. 2, 3, 4 & 5. † Fig. 2, 3, 4, 5, *M*.
‡ *O O*.

gueur *. Il est absolument essentiel que ces grandes mesures soient très exactes; on marque avec un fil †, qui entoure leur col ou le Tube, jusqu'où elles doivent être remplies. On les mesurera chacune au moins deux ou trois fois. La petite peine qu'on y trouvera, sera payée par le plaisir qu'on aura de voir combien cette façon de mesurer est précise.

Dès qu'on est une fois fourni de grandes & de petites mesures, on est en état de graduer assez vîte des Thermometres, quelque difference qu'il se trouve entre les capacités de leurs Boules & de leurs Tubes. Graduons-en un. Les procedés que nous suivrons, guideront pour la graduation de tout autre. Commençons pourtant par remarquer qu'on ne doit songer à le remplir d'Esprit de Vin, que lorsque ses degrés auront été marqués. Je suppose que la Boule & le Tube, qui me feront bien-tôt un Thermometre, sont scéllés ensemble. On marquera à peu près sur ce Tube l'endroit où l'on veut que se trouve le terme de la congélation de l'eau, & cela par le moyen d'un fil assez fin, arrêté par un nœud autour du Tube ‡.

Ce terme de la congélation de l'eau peut être pris arbitrairement sur une portion du Tuyau d'une assez grande étendue; tout ce que sa détermination exige, c'est qu'il soit au moins une fois plus près de la Boule que de l'extrémité supérieure du Tuyau. Quand la distance de ce terme à la Boule ne seroit que le tiers ou le quart de l'autre distance, sou-

* Fig. 6. & 7. † 4. ‡ Fig. 1. K.

ſouvent il n'y auroit aucun inconvénient.

Je verſe enſuite dans le Tuyau des meſures de 100, ou même des meſures plus grandes, juſqu'à ce que, la Boule étant remplie, la liqueur s'éleve au terme marqué. Mais une circonſtance eſſentielle à obſerver, & qui ſembleroit devoir jetter en bien des embarras, c'eſt que le volume de la liqueur qui eſt borné par ce terme, doit être exprimé par un nombre exact de centaines, par exemple, par 500, par 800, par 1000. Or il n'y a que peu de cas où cela ſe puiſſe trouver. Dans une infinité d'autres cas la ſurface de la liqueur ſera un peu au-deſſous, ou un peu au-deſſus du fil; alors il n'y a qu'à élever ou abaiſſer le fil juſqu'à ce qu'il ſoit le vrai terme du volume meſuré *. Dans un grand nombre d'autres cas la derniere meſure de 100, qui a été verſée, ſuffit à peine pour remplir la Boule †; & ſi on ajoutoit une nouvelle meſure de 100, elle monteroit trop haut dans le Tube. L'expédient auquel j'ai recours alors eſt ſimple: au-lieu de verſer un nombre de meſures de liqueur moindre que 100, ce qui donneroit des nombres d'où réſulteroient des degrés difficiles à comparer ſur differens Thermometres, je fais entrer dans le Tube de petits grains d'une matiere peſante & ſolide, comme des grains de gros gravier, de petits fragmens de verre. Des grains de plomb ſeroient la plus commode des matieres, ſi une circonſtance, dont nous parlerons bientôt, ne demandoit quelquefois qu'on leur préférât d'autres. Ces

* Fig. 1. CC. † Fig 1. H.

Ces grains solides, quels qu'ils soient, tombent dans la Boule*; ils y occupent une place qui auparavant étoit occupée par de la liqueur; la liqueur monte dans le Tube; des grains jettés successivement la font élever jusqu'au terme où on la veut †. Ces grains produisent un effet semblable à celui qu'on produiroit, si on étoit maitre de diminuer à son gré la capacité de la Boule. Comme le volume qu'ils y occupent n'est pas bien grand, & que d'ailleurs leur dilatabilité est si petite, en comparaison de celle de l'Esprit de Vin, qu'elle peut être regardée comme nulle, ils ne produiront par la suite aucun dérangement sensible dans la marche du Thermometre.

La liqueur dont je remplis la mesure de 100, n'est que de l'eau. J'évite d'employer l'Esprit de Vin pour graduer; le volume de la quantité qu'on aura fait entrer dans le Thermometre, pourroit croitre avant que l'opération fût finie. Des expériences, qui seront rapportées dans la suite, prouveront au contraire qu'il n'y a nullement à craindre que le volume de l'eau change sensiblement pendant le tems nécessaire à graduer le Thermometre.

Que celui sur lequel nous allons continuer de travailler, contienne 1000 mesures jusqu'au terme fixé pour la congélation artificielle ‡, c'est au-dessus & au-dessous de ce terme qu'il nous faut marquer les degrés. Le nombre des supérieurs que nous appellons *degrés de dilatation*, doit être au moins double de celui des

* Fig. 1. R. † Fig. 1. CC. ‡ Fig. 1. CC.

des inférieurs que nous nommons *degrés de condenſation*. Ce ſont ceux-ci qui doivent être marqués les premiers. Si je veux qu'il y en ait 25, 30, ou tout autre nombre, je vuide de l'eau de mon Thermometre dans une meſure de 25, ou de 30, juſqu'à ce que je l'aye remplie. Ainſi depuis *CC* juſqu'en 25 [a] il reſte un vuide de 25 meſures ou degrés.

Cela fait, j'attache le Thermometre, avec de petites cordes ou des fils de Léton [b] ſur la Planche deſtinée à le porter par la ſuite [c], & ſur laquelle ſes degrés doivent être écrits. Un papier blanc, collé deſſus, eſt prêt à recevoir les traits. Le premier que je tire eſt celui de la congélation de l'eau; il eſt poſé à la hauteur du fil qui la marque ſur le Tube [d]. Je tire enſuite un ſecond trait vis-à-vis le niveau de l'eau [e], & alors je ſuis en état de commencer à graduer. Je remplis une petite meſure, je la vuide dans le Tuyau: quand toute ſa liqueur eſt deſcendue, je tire un trait vis-à-vis l'endroit où la ſurface de l'eau s'eſt élevée. On remplit enſuite une ſeconde fois la meſure, on la vuide dans le Tube, & on tire encore un trait à l'endroit où s'eſt élevée la ſurface de l'eau. On répéte cette manœuvre tout autant de fois que le demande le nombre des degrés qui peuvent être contenus dans la capacité du Tuyau, & qui doivent être marqués ſur la Planche.

Pour les premiers Thermometres que je fis faire, on rempliſſoit d'eau la petite meſure

a Fig. 1. b Fig. 8. *LL. CC.*
c Fig. 8. *SS. TT.* d Fig. 8. *CC.* e 25.

ſure qui devoit donner l'étendue d'un degré, mais l'expérience m'apprit que la graduation devenoit longue à faire, &, qui pis eſt, incertaine. Une petite meſure d'eau, verſée dans un long Tuyau, ne ſuffit preſque qu'à en mouiller les parois; elle coule lentement le long de ces parois, auxquelles elle a de la diſpoſition à s'attacher. On eſt incertain du tems où toute l'eau d'une meſure eſt deſcendue; toute celle des premieres meſures ne deſcend pas, il en reſte toujours d'adhérente aux parois. Je penſai que ſi au-lieu de remplir la petite meſure d'eau, je la rempliſſois de Mercure, que j'éviterois tous ces inconvéniens. Le Mercure ne s'attache point au verre, & ce peſant liquide deſcend promptement. Auſſi ai-je vu qu'en l'employant, la graduation étoit bien faite & bientôt faite. On y gagne en occupant deux Artiſtes à la faire. L'un remplit la petite meſure de Mercure, & la vuide dans le Tuyau. Dès qu'elle eſt deſcendue dans la Boule, elle ſouleve l'eau à la hauteur où elle doit monter. Dans l'inſtant, le ſecond Artiſte tire un trait ſur la Planche, vis-à-vis le niveau de l'eau. Une centaine de degrés, ou moins, qu'on a à marquer ſur la Planche, ſont ainſi marqués en très peu de tems & très exactement.

Tous les traits ayant été tirés, on ôte le Thermometre de deſſus la Planche, & alors on écrit à ſon aiſe la valeur de chaque trait, ſelon ſa place, c'eſt-à-dire, le nombre de chaque degré; je les fais même écrire des deux côtés du Tube, & de chaque côté d'une ma-

maniere differente *. D'un côté on commence par mettre o vis-à-vis le grand trait qui marque la congélation de l'eau. Le premier trait au-dessous est marqué 1 ; celui qui suit en descendant, est marqué 2, & ainsi de suite jusqu'à 25, nombre auquel nous nous sommes fixés dans notre exemple ; & c'est-là la suite des degrés descendans ou de condensation. Vis-à-vis le premier trait, au-dessus de celui de la congélation, j'écris aussi 1 ; 2 vis-à-vis le suivant ; & ainsi j'écris la suite des degrés ascendans ou de dilatation.

De l'autre côté du Tube, vis-à-vis le terme de la congélation de l'eau, j'écris 1000 pour notre Thermometre, dont le volume de la liqueur, lorsqu'elle est au niveau de ce trait, est de 1000 parties. J'écrirois 900, 800, pour celui dont le volume seroit alors de 900, ou de 800 parties. Le trait qui est immédiatement au-dessous, est marqué par 999, celui d'après par 998, & ainsi des autres qui marquent les degrés descendans. Le premier degré ascendant est marqué 1001, le second 1002, &c. Ainsi les degrés d'un côté expriment simplement de combien la liqueur s'est dilatée ou condensée au-dessus ou au-dessous du terme de la congélation artificielle, par les nombres 1, 2, 3, 4, &c. & ceux de l'autre côté expriment le volume actuel de la liqueur, qui dans la congélation artificielle est 1000. Tantôt ce volume est réduit à 998, à 985, tantôt il est renflé à 1002, à 1020, &c.

La Planche étant ainsi graduée, le plus dif-

* Fig. 8.

difficile, & ce qui demande le plus d'attention, eſt fait. Il reſte à mettre la juſte quantité d'Eſprit de Vin dans le Thermometre. Auparavant on a à faire ſortir l'eau dont on l'a chargé, & les grains de gravier ou de ſable, ſi on a été contraint d'y en faire entrer. Pour les grains de ſable ou de gravier, on les mettra à part, parce qu'il ſera néceſſaire de les y faire rentrer après qu'ils auront été ſechés. On fera auſſi ſecher le Thermometre; quand il y reſteroit néanmoins une legere humidité, l'inconvénient ne ſeroit pas grand. Celui ſeul qu'elle peut produire ſeroit d'affoiblir l'Eſprit de Vin, & quelques gouttes d'eau n'affoibliroient pas ſenſiblement la quantité de liqueur qui doit être employée.

On verſera donc enfin l'Eſprit de Vin, de la qualité duquel on s'eſt aſſuré, dans le Thermometre, & cela juſqu'à trois ou quatre degrés au-deſſus du fil *, qui marque la congélation artificielle, comme juſqu'en *D*. Un peu plus ou un peu moins ne fait rien actuellement, parce que c'eſt le froid de l'eau glacée qui apprendra ce qu'il y aura à ajouter ou à retrancher à la quantité qu'on y aura fait entrer, car il s'agit à préſent de faire geler de l'eau autour de la Boule où eſt cet Eſprit de Vin.

Pour cela, on poſera la Boule du Thermometre dans un vaſe de fer blanc, cylindrique, dont le diametre intérieur excedera le ſien de peu †. Si la hauteur de ce vaſe eſt telle que ſes bords s'élevent juſqu'au fil qui marque

* Fig. 1. *CC*. † Fig. 9. *VV*.

que sur le Tuyau le terme de la congélation, ce sera le mieux; mais quand ses bords ne s'éleveroient que de quelques degrés au-dessus de la Boule, le Thermometre n'en sera pas moins bon sensiblement. Enfin on remplira ce vase de l'eau qu'on doit faire geler.

On sait assez comment se fait la glace artificielle; les procedés usités journellement sont ceux même dont on se servira pour geler l'eau qui environne la Boule de notre Thermometre. Le vase, où elle est contenue, doit être mis dans un autre vase d'un plus grand diametre, & au moins de même hauteur. Le Fer blanc est encore une matiere commode pour ces sortes de vases. Le vuide qui reste entre les parois des deux vases, sera rempli de glace qui aura été bien pilée, & mêlée avec une bonne dose, soit de Salpêtre, soit de Sel ammoniac, soit de Sel marin. Une précaution encore accélere la congélation, c'est de couvrir le dessus des vases, l'air extérieur en est moins capable d'arrêter l'effet qu'on veut produire. Les faiseurs de Liqueurs glacées se contentent de mettre au dessus des vases quelques serviettes, quelques torchons. On fera encore mieux, si sur le linge étendu sur les bords du vase, on met une couche de glace pilée qu'on recouvrira de plusieurs torchons ou serviettes.

A mesure que l'eau, qui entoure la Boule du Thermometre, se refroidit, la liqueur descend dans le Tube. Quand la surface de cette eau est gelée, la liqueur est bien près du plus bas terme où elle descendra. Lorsqu'on

qu'on jugera qu'elle est à peu près aussi bas qu'elle peut aller, si elle est au dessous du terme marqué par la congélation comme en *B* *, on fera entrer de l'Esprit de Vin peu à peu avec la petite mesure, ou avec le petit entonnoir †, & cela jusqu'à ce que l'Esprit de Vin s'éleve dans le Tube à la hauteur du fil qui marque le terme ‡. On fera ensuite attentif à observer si la liqueur ne continue pas à descendre; si elle descend encore, on ajoutera encore ce qu'il faut de liqueur pour la faire monter au terme marqué. Lorsqu'elle y reste constamment, on peut retirer la Boule de la glace. Mais pour n'avoir pas la peine de briser la glace, & ne pas faire courir risque au Thèrmometre, il vaut mieux laisser fondre la glace, & attendre qu'elle laisse sortir librement la Boule, ou accélérer la fonte de la glace en jettant dessus de l'eau chaude.

Nous devons avertir qu'il arrive quelquefois, qu'après avoir fait entrer dans le Tube la petite quantité d'Esprit de Vin qui sembloit nécessaire pour élever la liqueur jusqu'au fil, qu'après avoir vu sa surface de niveau avec le fil, qu'elle vient, dans un quart d'heure, à l'excéder d'une ligne, ou de davantage. On croiroit que c'est que la glace commence à se fondre; cependant l'élévation de l'Esprit de Vin est quelquefois dûe à une autre cause: il a fallu du tems pour se rendre, à celui qui en descendant a rencontré les parois du vase. On a preuve certaine que c'est cette

* Fig. 9. † Fig. 10. ‡ Fig. 9. CC.

cette cauſe qui produit la quantité excédente de volume de liqueur, lorſqu'on voit que ſa ſurface ſe ſoutient conſtamment au même terme; elle s'y ſoutient pendant plus de huit à dix heures, lorſque les vaſes ſont dans un endroit frais, & qu'ils ont été bien enveloppés. Il faut donc retirer ce qu'il y a de liqueur au deſſus du fil. On le peut, en faiſant entrer dans le Tube un Tuyau capillaire, & ſuçant à ſon bout ſupérieur, pendant que l'inférieur touche la liqueur. On peut auſſi ſe ſervir du Tuyau capillaire pour porter dans le gros Tuyau ce qui manque de liqueur juſqu'à la ligne de la congélation. Cette façon d'achever de le remplir eſt plus préciſe, & même plus prompte que celle de verſer de la liqueur par ſon ouverture ſupérieure; on n'a point à attendre le long écoulement de celle qui s'eſt attachée contre les parois. Souvent il y a ſi peu de liqueur à ôter, qu'on en ôteroit trop avec le Tuyau capillaire. Il eſt plus commode d'avoir un fil dont on a engagé un des bouts dans un grain de plomb. On fait deſcendre ce grain de plomb dans la liqueur du Tube; une petite partie de cette liqueur eſt entraînée par le plomb & le fil, lorſqu'on les retire. En répétant deux ou trois fois le même manege, on en ôte ce qui étoit à ôter. Au reſte, s'il y a une circonſtance qui demande de l'attention, c'eſt celle dont il s'agit, c'eſt-à-dire, celle de mettre bien de niveau, avec le fil qui entoure le Tube, la ſurface de l'Eſprit de Vin condenſé par la glace. S'il y avoit erreur en cet endroit de $\frac{1}{4}$, ou de $\frac{1}{8}$ de degré, ce ſeroit une

erreur

erreur qui se trouveroit la même à tous les degrés.

Le Thermometre étant retiré de la glace, il ne reste plus qu'à scêller hermétiquement le bout du Tube *. Ceux qui connoissent la Lampe des Emailleurs, savent assez comment cela se fait. En scêllant le bout du Tuyau, on échauffe l'Air qu'il contient, on le raréfie, de sorte que celui qui reste au-dessus de la liqueur, n'a plus ni la densité, ni par conséquent le ressort de l'Air ordinaire.

Au-lieu de scêller le bout du Tuyau à la Lampe, on peut se contenter de le boucher avec un mêlange de Cire & de Therebentine: C'en est assez pour ôter à l'Air intérieur toute communication avec l'Air extérieur. On peut même faire qu'alors l'Air intérieur se trouve plus raréfié qu'il ne l'est lorsque le Tube a été scêllé de l'autre maniere, & qu'il soit raréfié à un point plus connu. Pour cela on mettra la Boule du Thermometre dans de l'eau, qu'on fera ensuite chauffer peu à peu. La liqueur s'élevera, l'Air sera chassé, & sortira par le bout du Tuyau encore ouvert; on le fermera quand l'espace occupé par l'Air n'en paroitra contenir que la quantité qu'on y veut laisser. Si même la longueur du Tuyau le permet, avant de le boucher, on fera monter l'Esprit de Vin au terme où la chaleur de l'eau bouillante peut le conduire, ou à peu près. Nous expliquerons pourtant une autre maniere de marquer ce terme, qui ne demande pas qu'on mette la Boule du Ther-

* Fig. 9. X.

Thermometre dans l'eau bouillante; mais on eſt plus ſûr de la vérité de la détermination d'un point, quand deux méthodes differentes donnent ce même point.

C'eſt une queſtion, que nous n'examinons pas actuellement, de ſavoir s'il vaut mieux laiſſer dans le Thermometre de l'Air tel à peu près que l'Air ordinaire, ou s'il vaut mieux n'y laiſſer que de l'Air extrêmement raréfié, tel qu'eſt celui des endroits que les Phyſiciens appellent *vuides*. Je dirai ſeulement d'avance que dans l'un & dans l'autre parti il y a des inconvéniens, qui ſont moindres à mon avis dans un état moyen; de ſorte que j'incline à ne pas laiſſer l'Air du Tuyau dans ſon état ordinaire, & auſſi de n'y pas laiſſer un Air très raréfié. Un degré de raréfaction approchant de celui qu'il a dans la plus grande chaleur de nos climats, me paroît le plus convenable; & ce degré eſt plus aiſé à ſaiſir à peu près en faiſant élever l'Eſprit de Vin dans le Thermometre au moyen de l'eau chaude, & ſcêllant le bout de ce Thermometre avec notre compoſition de cire ſur laquelle on étendra enſuite, ſi l'on veut, un Vernis, qu'en le ſcêllant à la Lampe. Le ſeul inconvénient que je ſache à le ſcêller avec la compoſition de cire, c'eſt qu'il faut alors éviter de renverſer le Thermometre, de crainte que l'Eſprit de Vin ne cauſât quelque alteration au bouchon. On peut pourtant le ſcêller à la Lampe, ſans y renfermer un Air très raréfié, & cela ſi on ſe contente d'abord d'allonger le bout du Tuyau en un fil creux, délié, qu'on le laiſſe refroidir, & qu'on ſcêlle

en-

enſuite aſſez bruſquement le bout de ce filet, ou de ce Tuyau capillaire.

Enfin le bout du Tube du Thermometre ayant été ſcêllé de quelque façon que ce ſoit, il ne reſte plus qu'à le mettre ſur la Planche graduée, & à l'y aſſujettir. Sa poſition exacte eſt aiſée à retrouver; le fil qu'on a laiſſé ſur le Tube, & qui marque le terme de la congélation de l'eau, eſt un repaire ſûr; ce fil doit être poſé vis-à-vis le trait qui la marque auſſi ſur la Planche.

Au reſte, ſi on en juge par la longueur des petits détails dans leſquels nous venons d'entrer, la conſtruction des nouveaux Thermometres paroitra plus longue & plus difficile qu'elle ne l'eſt en effet. Mais on ne doit pas juger du tems que les choſes demandent à être faites, par celui qu'elles demandent à être dites. Il y aura même bien des abbréviations pour les Ouvriers qui ſe voudront charger de faire ces Thermometres. Ils peuvent avoir de grandes meſures, de capacités differentes, qui chacune en contiendront 1000 petites, & dès qu'ils auront un certain nombre de ces meſures, il s'en trouvera preſque toujours quelqu'une propre à remplir le Thermometre juſqu'au terme de la congélation de l'eau, d'autant plus que ce terme peut être pris ſur une aſſez grande portion de Tube. Si la meſure verſée laiſſe la ſurface de la liqueur trop bas dans le Tuyau, on a, pour la faire monter, la reſſource des grains ſolides introduits dans la Boule. Une autre abbréviation c'eſt, au-lieu des meſures de 1000, d'en avoir de 975, & cela, comme celles de

1000, de differens volumes. La mesure de 975 ayant été vuidée dans le Thermometre, on versera une à une 25 petites mesures de Mercure. Dès qu'une de ces mesures sera entrée dans la Boule, on marquera sur la Planche, par un trait, jusqu'où la surface de l'eau a été élevée ; & ainsi de suite, on graduera le Thermometre d'une maniere plus aisée que celle que nous avons pratiquée ci-devant, car après avoir rempli le Thermometre jusqu'au terme de la congélation de l'eau, nous en avons retiré 25 mesures d'eau, pour y mettre ensuite 25 mesures de Mercure. Enfin on trouvera sans doute bien d'autres abbréviation auxquelles je n'ai pas pensé.

Il y en a pourtant encore une dont nous ne nous dispenserons pas de parler, qui sera d'une très grande commodité aux Ouvriers qui se chargeront de faire beaucoup de Thermometres. Quand ils en auront une fois quelques-uns de construits dans toute l'exactitude possible, & qu'ils auront du même Esprit de Vin dont ils les ont remplis, ou d'un Esprit de Vin bien reconnu pour être de la qualité du premier, ils pourront s'épargner les petits frais, & la peine de faire congeler l'eau autour de leurs Boules. Les capacités des Boules & des Tubes ayant été bien mesurées, en un mot la graduation une fois faite, ils verseront de l'Esprit de Vin dans les nouveaux Thermometres, jusqu'à ce qu'il y soit élevé au degré où l'est actuellement celui des autres: la marche des uns & des autres sera précisément la même, si les derniers faits ont été gradués soigneusement. Nous n'avons

n'avons rien dit des petits entonnoirs on doit dont se servir pour vuider dans le Tube les grandes mesures, tels que sont ceux de forme ordinaire *, ou ceux † de la forme de nos petites mesures avec lesquelles on prend à plusieurs fois la liqueur d'une grande mesure, après l'avoir versée dans un verre.

Quel que soit, dans differens Thermometres, le nombre des degrés qui y exprime le volume de l'Esprit de Vin condensé par la congélation artificielle, il sera toujours aisé de les ramener à une mesure commune, leurs rapports sont toujours aisés à voir. Que le volume de la liqueur, qui est exprimé dans l'un par 800, le soit dans l'autre par 900, le rapport de leurs degrés sera comme 8 à 9, c'est-à-dire, que 8 degrés de celui de 800 en vaudront 9 de celui de 900. Ainsi ces deux Thermometres étant exposés à la même température d'Air, si la liqueur du premier est élevée à 16 degrés, celle du second le sera à 18. Il en sera de même de ceux où le volume condensé par la congélation est exprimé par tout autre nombre exact de 100es. Mais des nombres rompus, comme 813, 743, rendroient la comparaison des degrés embarrassante, rarement la pourroit-on faire sur le champ; c'est ce qui nous a fait rejetter ces sortes de nombres. J'aimerois pourtant mieux qu'on exprimât le volume de la liqueur par le même nombre de centaines sur tous les Thermometres; il y a mille gens, parmi ceux qui se servent de Thermometres, que des ré-

* Fig 10. † Fig. 11.

réductions auſſi ſimples que les premieres dont nous venons de parler, embarraſſeroient. Je voudrois donc, en leur faveur, que le terme de la congélation de l'eau fût exprimé par un même nombre ſur tous les Thermometres; 1000 eſt celui que j'ai pris pour ceux que j'ai fait faire. Au moyen des grandes meſures de 1000, ou de 975, de differentes capacités, il ſera toujours aiſé de conſtruire les Thermometres ſur ce nombre. Un qui auroit été conſtruit ſur 800, 900, peut auſſi y être ramené, pourvu qu'on ſe donne la peine d'y mettre une nouvelle échelle de degrés. Dès que le nombre de 800, par exemple, eſt pris pour 1000, 8 des anciens degrés en valent 10 des nouveaux, 4 des anciens en valent 5 de ceux-ci. Pour conſtruire la nouvelle échelle, il n'y a qu'à diviſer 4 degrés en cinq. Le Compas de proportion facilitera cette diviſion, & elle ne produira aucun changement ſenſible dans les rapports que les degrés doivent avoir entre eux, ſi quand on diviſe les quatre degrés en cinq, on marque d'abord les deux nouveaux degrés, de façon que le premier ſoit pris ſur la partie la plus baſſe du plus bas des quatre, & le cinquieme ſur la partie la plus élevée du quatrieme. Il en ſeroit de même de toute autre réduction, comme de 900 à 1000.

Quand on n'aura point éprouvé ſoi-même combien les procedés que nous avons expliqués pour graduer les Thermometres ſont aiſés à pratiquer, on aura peine à croire qu'ils donnent des meſures auſſi exactes qu'ils les donnent réellement. Au moyen des petites me-

mesures remplies avec le Mercure, chaque degré est déterminé avec une extrême précision. Il paroitra peut-être plus difficile de mesurer la capacité de la Boule & de la partie du Tube qui contiennent la liqueur, dont le volume est condensé par la congélation de la glace artificielle. Cette capacité est de 1000 mesures; sur 1000 mesures, ne se trompe-t-on point de quelques-unes? Je répondrai que si on est attentif, qu'on ne se trompe pas d'une seule mesure. Mais se trompât-on de deux ou trois, ce ne seroit pas une source d'erreur considerable; car supposons qu'au-lieu de 1000, on eût mis 1002 mesures, voyons où iroit l'erreur, dans un cas qui donnera idée de ce qu'elle pourroit être dans les autres. Que le Thermometre, dont le volume de la liqueur condensée par la congélation artificielle est exactement 1000, marque 20, celui dont le volume de la liqueur condensée est 1002, marquera alors 20 degrés plus $\frac{1}{25}$ de degré. L'erreur sur 20 degrés sera donc de $\frac{1}{25}$ de degré, & sur 40 degrés qui est un terme d'un chaud excessif, de $\frac{2}{25}$. Erreurs assez petites pour pouvoir être négligées.

Nous avons remis jusqu'ici tout ce qui est de discussion. La premiere qui se présente est de savoir si le terme de la congélation de l'eau est assez fixe pour que nous puissions nous y tenir; si toute glace artificielle, dans le tems qu'elle se forme, a un égal degré de froid. Nous savons que pendant l'Hyver, le degré de froid de la glace n'est pas à beaucoup près toujours le même. J'ai fait, dans le

le mémorable Hyver de 1709, des expériences sur une glace dont le froid surpassoit extrêmement celui des glaces ordinaires. Je ne me suis point avisé alors d'observer, dans l'instant même où cette glace se formoit, si elle étoit plus froide que de la glace artificielle. Mais quoique la glace soit susceptible d'une plus grande augmentation de froid, il ne s'ensuit nullement qu'il y ait de la glace d'eau pure, qui, quand elle se forme, soit plus froide que d'autre glace. C'est un fait qui mérite d'être éprouvé. Cependant, quel qu'en soit le succès, il ne fait rien contre le degré de froid de notre glace artificielle; car je suppose que nous faisons congeler de l'eau dans un Air moins froid que la glace. Or dans cette supposition, tout le froid que prend l'eau qui se gele, ne peut être produit que par la glace & les sels qui environnent le vase où elle est contenue; cette eau reste liquide, eau ordinaire, tant qu'elle n'a pas pris assez de froid, tant qu'elle n'a pas perdu assez de la matiere qui entretient le mouvement de ses parties. Mais quand le mouvement de ses parties s'arrête, quand elle commence à se figer, il paroît que ce doit toujours être quand il ne lui reste plus qu'une certaine quantité déterminée de la matiere nécessaire à la mettre en mouvement, ou, ce qui est la même chose, à l'échauffer.

Il reste pourtant encore une difficulté considerable, elle naît d'observations curieuses que nous devons aux Thermometres. De l'eau, exposée l'Hyver à un Air qui a un certain degré de froid, gele; exposée d'autres

jours

jours de l'Hyver à un Air qui a un plus grand degré de froid, elle ne gele pas. Il y a plus: le dégel commence souvent, la glace commence à se fondre, quoique le Thermometre marque un degré de froid beaucoup plus grand que celui qu'il marquoit, lorsque la glace s'est formée. Mais avant de rendre raison de ces faits, toutes leurs circonstances demandent à être mieux examinées que je ne l'ai fait jusqu'ici: l'Hyver où nous allons entrer me mettra apparemment en état de faire cet examen.

Après tout, qu'en résulte-t-il? c'est que l'Air n'est pas toujours en état, quoiqu'également froid, de glacer l'eau; qu'il peut même la fondre quelquefois, quoiqu'il ait un degré de froid supérieur à celui avec lequel il l'a gelée. Mais notre glace artificielle n'est exposée à aucune des varietés que l'Air nous fait voir dans celle dont il occasionne la production par son attouchement. 1°. La nôtre est faite dans un tems où l'Air ne pourroit agir que pour la fondre. 2°. Elle est produite par un mêlange de sels & de glace plus froid alors que l'Air. 3°. Enfin nous prenons la précaution de couvrir le vase qui contient l'eau qui doit être gelée, & celui qui contient le mêlange de glace & de sels, de le couvrir, dis-je, d'un linge sur lequel est étendue une couche de glace. Cette couche de glace dérobe à l'action, ou à la plus grande partie de l'action, de l'Air extérieur, toute l'eau qui doit se geler, & le mêlange de glace & de sels.

Mais ce qui vaut mieux que tous les rai-

fonnemens précédens, & qui eſt, ce me ſemble, ſans replique, c'eſt que j'ai fait des glaces en differentes ſaiſons de l'année, j'en ai fait dans des jours ſereins & dans des jours pluvieux, pendant que differens vents ſouffloient; & ces glaces ont toujours fait deſcendre le Thermometre au terme marqué pour la congélation artificielle.

Paſſons enfin au dernier point fondamental de la conſtruction des Thermometres, & à celui qui juſqu'ici a été négligé. Nous avons vu combien il eſt eſſentiel que la qualité de l'Eſprit de Vin qu'on y fait entrer ſoit connue & bien déterminée, ſans quoi on aura eu beau bien déterminer un point fixe d'où partent les degrés, ces degrés auront eu beau être meſurés exactement, & pris chacun égaux à une certaine partie du volume de la liqueur; differens Thermometres exprimeront les augmentations de froid & de chaud par des nombres de degrés qui ne feront pas comparables, s'ils ſont remplis d'Eſprits de Vin plus dilatables les uns que les autres, dans des proportions à nous inconnues. Il eſt donc abſolument eſſentiel d'avoir une méthode qui faſſe connoitre la qualité de l'Eſprit de Vin, dont on veut voir les augmentations & les diminutions de volume dans le Thermometre.

Dans les Mémoires de l'Académie de l'année 1718, nous en avons un de M. Geoffroy le jeune ſur la maniere de meſurer la force des Eaux-de-vie, où, après avoir examiné les moyens dont on s'eſt ſervi juſqu'ici pour y parvenir, après avoir fait voir combien ils ſont imparfaits, il en propoſe un nouveau qui promet

met plus d'exactitude, & qui en donne aussi davantage; c'est de remplir un petit vase cylindrique de l'Eau-de-vie dont on veut connoitre la force, de poser ce petit vase dans un autre qui est plein d'eau, de mettre alors le feu à l'Eau-de-vie, & de la laisser brûler autant qu'elle le peut. Il a poussé même la précaution jusqu'à faire couler continuellement de nouvelle eau dans le vase qui contient celui où l'Eau-de-vie brûle, afin d'entretenir cette eau dans un degré de chaleur toujours égal. Après que l'Eau-de-vie a été brûlée, il reste une certaine quantité d'eau ou de flegme. Il mesure la hauteur, ou, ce qui est la même chose, la quantité du flegme resté; de deux Eaux-de-vie, celle-là est la plus forte, qui laisse une moindre quantité de flegme.

Plus l'Esprit de Vin contenu dans le Thermometre est rectifié, plus il parcourt de chemin pendant qu'il se fait un changement dans la temperature de l'Air qui l'environne. A cet égard il vaut mieux employer un Esprit de Vin plus fort, qu'un qui l'est moins. Si cependant la qualité d'un Esprit de Vin foible, d'une Eau-de-Vie même, étoit plus aisée à déterminer que celle d'un Esprit de Vin rectifié, on pourroit faire des Thermometres avec de l'Eau-de-Vie. Ce qu'on leur a ôté en se servant d'une liqueur moins dilatable, il seroit aisé de le leur rendre en augmentant le diametre de la Boule, sans augmenter celui du Tuyau. Aussi m'étois-je proposé de faire entrer dans les Thermometres une Eau-de-Vie, qui, après avoir été brûlée, laissât une quantité de flegme connue, par exemple,

un quart de son premier volume. La méthode que nous venons de rapporter, me paroissoit très propre à fixer la qualité de celle dont je voudrois faire usage. C'a été avec regret que j'ai appris, par des expériences réitérées, que cette méthode, qui pouvoit être bonne pour le cas où on l'a employée, pour juger une contestation entre des Marchands sur la qualité des Eaux-de-Vie, pour distinguer des Eaux-de-Vie entre lesquelles il y a des differences considerables, ne donnoit pas des mesures d'une exactitude telle qu'il la falloit à des Expériences physiques fort délicates. J'ai, à dessein, affoibli de l'Esprit de Vin: tantôt sur quatre mesures d'Esprit de Vin j'en ai mis une d'eau; tantôt j'ai mis la même mesure d'eau seulement sur trois mesures du même Esprit de Vin; tantôt j'ai mêlé ensemble un égal nombre de mesures d'eau & d'Esprit. J'ai fait des mêlanges en diverses autres proportions moyennes, & cela pour avoir des Eaux-de-Vie de differentes forces. J'ai ensuite éprouvé si en faisant brûler ces differentes Eaux-de-Vie, avec toutes les précautions possibles, je trouverois des résidus de flegme proportionnés aux differentes qualités connues de ces Eaux-de-Vie, & j'ai vu que cette sorte d'épreuve ne répondoit pas assez à ce que j'en avois attendu. La même Eau-de-Vie a laissé souvent des résidus de flegme aussi differens entre eux que pourroient l'être ceux de deux Eaux-de-Vie de qualités differentes, & deux Eaux-de-Vie de qualités differentes m'ont souvent laissé le même résidu. Un rien est capable de faire

que

que la flamme s'éteigne plutôt dans une Expérience que dans l'autre, le plus leger souffle d'Air y suffit quelquefois. Pour remédier à l'agitation de l'Air, j'avois pourtant encore ajouté aux précautions demandées dans le Mémoire que je viens de citer. J'ai fait brûler mes essais d'Eaux-de-Vie dans des endroits clos, tels que sont les Lanternes des balances d'Essayeurs. Au-lieu d'entourer d'eau le vase dans lequel la liqueur brûloit, je l'ai souvent entouré de glace. Mais en un mot, quelque chose que j'aye fait & tenté, je n'ai pu, par cette méthode, parvenir à déterminer avec assez de précision la qualité de l'Eau-de-Vie que je destinois à des Thermometres.

Il est même à remarquer que ces épreuves ne m'ont jamais rendu toute la quantité d'eau que j'avois fait entrer dans l'Esprit de Vin; lorsque la partie spiritueuse s'élevoit en flamme, non-seulement elle enlevoit tout le flegme qui lui étoit comme propre, elle enlevoit encore une bonne portion de celui que je lui avois joint, & cela avec des varietés qui n'eussent pas permis de porter de jugement sur les proportions du mélange, à qui les auroit ignorées.

Forcé d'abandonner cette voye, j'en ai cherché une autre qui donnât des mesures plus exactes des qualités des Eaux-de-Vie & des Esprits de Vin. Il s'en présentoit naturellement une, propre même à faire connoitre immédiatement la qualité de la liqueur d'où l'effet des Thermometres dépend; c'est de reconnoitre de combien une liqueur se dilate depuis un certain terme de froid ou de

moindre chaud, jusqu'à un autre terme connu d'un plus grand chaud. Ces deux termes doivent être fixes, & assez éloignés l'un de l'autre pour donner des differences saisissables. Nous les avons dans la congélation artificielle de l'eau, & dans le degré de chaleur de l'eau bouillante: mais j'avois eu occasion, il y a longtems, de m'appercevoir que l'Esprit de Vin bout avant que l'eau, dans laquelle est plongée la bouteille qui le contient, soit parvenue à bouillir. Si on continue à faire chauffer de l'Esprit de Vin qui a commencé à bouillir, si on lui fait prendre le degré de chaleur de l'eau bouillante, il bout encore plus fortement. L'irrégularité qui est dans le nombre & dans la grosseur des bulles qui sont à la surface, de celles qu'on voit s'élever continuellement du fond du vase, & de celles qui sont par-tout parsemées dans la liqueur, ne permettent pas de déterminer avec précision le volume que la chaleur de l'eau bouillante fait prendre alors à l'Esprit de Vin. Ce sont ces considerations qui m'avoient arrêté; je ne suis venu à chercher les moyens de remédier à l'inconvénient des bouillonnemens, que quand j'ai vu que j'en avois absolument besoin. Tous les jours la Théorie nous montre comme simples, des procedés qu'on reconnoit impraticables quand on veut en faire usage; au contraire une infinité de procedés paroissent dans la Théorie tout pleins de difficultés, qui s'évanouïssent dans la pratique. J'ai voulu voir si les bouillonnemens de l'Esprit de Vin ne seroient point de ces difficultés qui semblent plus grandes à surmonter qu'elles

qu'elles ne le font réellement. Dans un petit Matras *, dont le col étoit assez délié, j'ai versé de l'Esprit de Vin jusqu'au dessus de l'origine du col †; j'ai mis ce Matras dans l'eau, que j'ai fait chauffer peu à peu jusqu'à ce qu'elle vînt à bouillir. L'Esprit de Vin a commencé, à l'ordinaire, à donner des bouillons, avant qu'il en parût sur l'eau; j'ai retiré le Matras de l'eau, & j'ai vu aussi-tôt tout bouillonnement cesser. J'ai marqué l'endroit du col du Matras où étoit resté l'Esprit de Vin immédiatement après que les bouillonnemens avoient été appaisés ‡; ensuite j'ai de nouveau plongé le Matras dans l'eau bouillante; la liqueur s'est élevée dans le col au-dessus du terme que j'avois marqué, après quoi elle a recommencé à bouillir, mais ce qui est à remarquer, c'est que lorsqu'elle a recommencé à bouillir, elle étoit plus haut que le terme où les bouillonnemens avoient cessé la premiere fois. Je l'ai encore retirée alors. Tout bouillonnement a encore été appaisé dans un instant, & l'Esprit de Vin s'est trouvé plus élevé encore dans le col du Matras, qu'il ne l'étoit la premiere fois ‡. Ainsi je l'ai retiré & je l'ai replongé plusieurs fois de suite jusqu'à ce que l'eau commençât à bouillir, & même pendant que l'eau bouilloit fortement. J'ai toujours vu les bulles, tant de la surface, que celles qui montoient du milieu de l'Esprit de Vin, disparoitre, un instant après que l'Esprit de Vin étoit tiré de l'eau, & sa surface supérieure s'applanir.

Cette

* Fig. 12. † ff. ‡ gg. ‡ hh.

Cette ſurface s'eſt élevée de plus en plus juſqu'à un certain point; quand elle a été arrivée une fois à ce point *, chaque fois que je remettois le Matras dans l'eau bouillante, les bouillonnemens de l'Eſprit de Vin s'élevoient; mais dès que je retirois le Matras, & que les bouillonnemens étoient arrêtés, la ſurface applanie de l'Eſprit de Vin ſe retrouvoit toujours vis-à-vis ce même point du col du Matras. J'ai donc cru devoir regarder ce terme comme le terme fixe du plus grand degré de dilatation où la chaleur de l'eau bouillante pouvoit porter l'Eſprit de Vin, que j'eſſayois, ſans le faire bouillir; & j'ai cru que ce terme ſeroit de même ſaiſiſſable pour tout autre Eſprit de Vin, & pour toute Eau-de-Vie, qu'il donneroit une maniere aſſez aiſée & aſſez préciſe de reconnoitre le degré de dilatabilité de chacune de ces eſpeces de liqueurs, & une maniere de les caractériſer.

Pour voir ſi des Expériences plus ſuivies, & faites avec plus de précautions, me confirmeroient dans cette idée, j'ai ſuivi la même route que j'ai indiquée pour la conſtruction des Thermometres: après avoir choiſi un petit Matras de verre dont le col étoit aſſez délié, j'ai rempli le Matras juſqu'un peu au deſſus de l'origine de ſon col, avec de petites meſures † ; il en eſt entré 400 juſqu'à l'endroit déſigné ‡. J'ai marqué cet endroit avec un fil, lié autour du col; alors j'ai mis le Matras dans une boîte de fer blanc, que j'ai

* Fig. 12. *ii.* † Fig. 12. *CC.* ‡ *CC.*

j'ai posée dans une boîte plus grande, remplie de glace pilée, & mêlée avec du sel. En un mot, j'ai fait geler l'eau qui entouroit le Matras. L'Esprit de Vin est descendu au dessous du fil. J'ai fait entrer dans le Matras autant de mesures qu'il en a fallu, afin que l'Esprit de Vin se retrouvât encore à la hauteur du fil *. Enfin mon fil m'a marqué le terme d'un volume de 400 mesures d'Esprit de Vin, condensé par la congélation artificielle de l'eau. Ce que je cherchois étoit d'avoir en parties de ce même volume, sa difference avec le volume de la même quantité d'Esprit de Vin dilaté par la chaleur de l'eau bouillante. J'ai donc fait chauffer & bouillir de l'eau. A la vapeur seule de l'eau bouillante j'ai échauffé le Matras, qui contenoit l'Esprit de Vin. Quand je l'ai jugé assez échauffé, pour qu'il n'y eût pas à craindre que la chaleur de l'eau bouillante le fît casser, je l'ai enfoncé peu-à-peu dans cette eau; bientôt l'Esprit de Vin a commencé à bouillir, & aussi-tôt j'ai retiré le Matras. J'avois eu la précaution d'entourer son col d'un second fil que je pouvois faire glisser en montant. Avec ce fil j'ai marqué l'endroit où l'Esprit de Vin étoit resté après que les bouillonnemens avoient été appaisés. Aussi-tôt j'ai remis l'Esprit de Vin dans l'eau bouillante. Il s'est élevé au-dessus du fil, & bientôt il a bouilli. J'ai retiré le Matras. J'ai élevé le fil jusqu'à l'endroit où l'Esprit de Vin s'est trouvé après que les bulles ont eu disparu. Quand j'ai eu ré-

* *CC.*

répété ce manege cinq à six fois au plus, le terme de l'élévation marquée par le fil, après les bouillonnemens cessés, s'est trouvé constamment le même *, ainsi je l'ai regardé comme le terme de la plus grande dilatation que l'eau bouillante pouvoit donner à cet Esprit de Vin sans le faire bouillir. Dans d'autres Expériences, dont il suffira de rapporter les résultats, j'ai suivi de pareils procedés. Pour achever celle que nous avons commencé à détailler, il ne restoit plus qu'à mesurer la capacité de l'intervalle compris entre les deux fils †, en mesures pareilles à celles dont il y avoit 400 jusqu'au premier fil, jusqu'à celui qui marquoit le terme de la congélation artificielle. J'ai trouvé que cet espace contenoit 35 de ces mesures. Ainsi le volume de l'Esprit de Vin, qui condensé par la glace artificielle, étoit 400, raréfié par la chaleur de l'eau bouillante, étoit 435. Cet Esprit de Vin étoit du meilleur qui se trouve ordinairement chez les Marchands. Brûlé dans la cuilliere, il ne laissoit point d'eau, il allumoit la poudre. Mais on sait combien ses qualités sont peu déterminées par ces dernieres proprietés, qu'elles peuvent convenir à des Esprits de Vin plus ou moins rectifiés; au-lieu que le caractere de cet Esprit de Vin est bien déterminé, quand on dit qu'il est tel que son volume condensé par la glace artificielle est à son volume dilaté par la chaleur de l'eau bouillante, comme 400 est à 435, comme 80 est à 87. Un Esprit de Vin plus rec-

* Fig. 12. *ii.* † *CC*, *ii.*

rectifié que celui dont il s'eſt agi juſqu'ici, donnera une plus grande difference entre les deux volumes, & un Eſprit de Vin plus foible en donnera une plus petite.

Pour m'aſſurer ſi les rapports ſe trouveroient tels qu'on les devoit attendre dans les Eſprits de Vin les plus foibles, j'ai commencé par m'aſſurer des degrés de dilatabilité de l'eau de Seine compris entre le terme de la glace artificielle, qui ne ſuffit pas pour geler l'eau renfermée dans un vaſe qu'elle environne, & le degré de dilatation produit par l'eau bouillante. J'ai trouvé que le premier volume de l'eau étoit au ſecond, environ comme 400 à 415. J'ai mêlé de cette eau, dont les degrés de dilatabilité étoient connus, avec de l'Eſprit de Vin de ma premiere épreuve, en mettant une meſure d'eau ſur trois d'Eſprit de Vin. Une quantité de cet Eſprit de Vin affoibli, dont le volume, condenſé par la glace artificielle, étoit de 400 meſures, a été raréfiée par la chaleur de l'eau bouillante, & ſon volume eſt devenu à peu près de 430 meſures. Le rapport du premier volume a donc été à celui du ſecond, comme 400 à 430, qui eſt préciſément le rapport qui devoit naitre du mélange que j'avois fait; car le volume total, pendant la condenſation, étoit compoſé de 300 meſures d'Eſprit de Vin, & de 100 meſures d'eau; or nous ſavons que 400 meſures de cet Eſprit de Vin condenſé, étant enſuite dilatées par l'eau bouillante, ſeroient devenues 435 meſures, ou 400 auroient donné une augmentation de 35. D'où il ſuit que l'augmentation donnée par 300 meſures eſt de

de 26 mesures & $\frac{1}{4}$ de mesure. De même 400 mesures d'eau condensée ayant dû donner par la dilatation une augmentation de 15 mesures, 100 mesures doivent donner 3 mesures & $\frac{3}{4}$. Or l'augmentation du volume de notre Esprit de Vin affoibli étoit composée de l'augmentation donnée par 300 mesures d'Esprit de Vin, & de l'augmentation donnée par 100 mesures d'eau; la premiere est 26 $\frac{1}{4}$, & la seconde 3 $\frac{3}{4}$; les deux ensemble font 30, qui est précisément la quantité qui a été trouvée par l'Expérience, dont l'exactitude a passé ce que j'en devois attendre; aussi n'en ai-je pas toujours eu une aussi grande dans celles que j'ai répétées sur des mêlanges faits en d'autres proportions, mais elle a toujours été aussi approchée que je le pouvois demander.

J'ai encore trouvé la même exactitude dans un mêlange fait d'un égal nombre de mesures d'Esprit de Vin & d'Eau. Le volume de cette Eau-de-vie, ou de cet Esprit de Vin foible, qui condensé par la congélation artificielle, étoit de 400 mesures, a crû par la chaleur de l'eau bouillante jusqu'à devenir 425.

Mais quand il arriveroit, par quelques circonstances particulieres, que le volume composé ne seroit pas précisément d'un degré de dilatabilité égal à celui qui doit résulter de ce que doivent fournir chacun des composans, la construction des Thermometres n'en souffriroit point, pourvu qu'on s'assurât du degré de dilatabilité qu'a l'Esprit de Vin affoibli qu'on y employe. Au reste, non seulement

ment il peut y avoir des circonstances qui empêchent que le degré de dilatabilité du volume composé ne soit égal à celui qui résulte de ce que doivent fournir chacun des composans ; il y en a réellement de telles, mais nous ne les examinerons pas aujourd'hui, elles tiennent à quelques autres faits physiques dont l'examen nous meneroit loin ; ce sera matiere suffisante à un autre Mémoire : mais les differences qui en naissent sur la dilatabilité de l'Esprit de Vin allié ne donnent pas de differences considerables dans la pratique.

Nous pouvons donc nous en tenir à cette méthode, non seulement pour caractériser les Esprits de Vin plus ou moins rectifiés, mais aussi pour déterminer les degrés de force des differentes Eaux-de-vie, & les comparer entre eux. Car ayant pris un Esprit de Vin d'une certaine dilatabilité connue, pour terme fixé, on reconnoitra par les épreuves de la dilatabilité des Eaux-de-vie qu'on a à essayer, combien il faudroit ajouter d'eau à cet Esprit de Vin pour le réduire à être une des Eaux-de-vie soumise à l'examen ; ou, ce qui est la même chose, quelle quantité d'Esprit de Vin, semblable à celui qui a été pris pour terme, & quelle quantité d'eau ou de flegme, sont mêlées ensemble pour composer l'Eau-de-vie dont il s'agit. L'utilité de cette méthode ne se borne pas à la construction des Thermometres ; il est une infinité d'autres cas, sur-tout dans le commerce, où la connoissance des qualités des Eaux-de-vie & de celles des Esprits de Vin est importante.

Mais

Mais nous devons avertir, que pour faire exactement l'essai de la dilatabilité de ces liqueurs, qu'il est essentiel de se servir d'un vase de la forme d'un Matras, ou d'une forme approchante, je veux dire, que le vase doit avoir un col long, qui ne soit pas extrêmement délié. Si au-lieu de Matras on se servoit d'une Boule de Thermometre adaptée à un Tuyau de médiocre grosseur, les bulles d'Air trouveroient trop de difficulté à monter, elles éleveroient l'Esprit de vin par vibrations. Dans des cols même assez gros, on pourra être surpris par des jets d'Esprit de Vin qui s'éleveront subitement à une grande hauteur, qui sortiront du Matras, & qui troubleront l'épreuve, si on n'est pas attentif à retirer la Boule de l'eau chaude, ou bouillante, dès que l'Esprit de Vin commence à bouillir. En un mot ces épreuves, pour ainsi dire, du titre de l'Esprit de Vin & de l'Eau-de-vie, ne seront exactes que quand elles seront faites avec les circonspections qu'elles demandent, que quand elles auront même été répétées plusieurs fois. Quelque sures que soient les règles qui font connoitre les titres de l'Or & de l'Argent, ces règles, pour être bien mises en pratique, demandent à l'être par gens intelligens, & même qui y soient exercés.

Tout ce qui doit être mesuré physiquement, ne peut l'être que dans une exactitude physique, qui ne donne jamais que des à peu près, mais qui ordinairement nous suffisent. Une circonstance accompagne nécessairement nos épreuves des Esprits de Vin & des

des Eaux-de-Vie, qui empêche que les résultats n'en soient absolument tels qu'ils devroient être. Il faudroit que la liqueur condensée par la glace, & que la même liqueur raréfiée par l'eau bouillante, se trouvât toujours dans une mesure d'une même capacité; or la mesure, de quelque matiere qu'elle soit faite, est elle-même condensable & raréfiable. Quand le froid de la glace agit sur le Matras, il le resserre, il diminue sa capacité; au contraire la chaleur de l'eau bouillante augmente sa capacité, elle le dilate. La capacité du Matras, qui, mesurée dans un Air temperé, a été trouvée 1000, n'est plus 1000, lorsque ce Matras est resté dans l'eau gelée, & est plus de 1000, lorsqu'il a été échauffé par l'eau bouillante. Nous mesurons les capacités des Matras dans un Air temperé, il arrive donc que l'endroit marqué pour contenir un volume de liqueur appellé 1000, ne le contient pas, lorsque la glace l'a eu refroidi; & que l'endroit du Matras marqué, pendant qu'il étoit échauffé par l'eau bouillante, pour 1075, par ex. ou 1080, a alors une capacité qui surpasse ce nombre. On ne peut éviter ces alternatives de diminutions & d'augmentations dans la capacité du Matras, mais il m'a semblé qu'on pouvoit les évaluer à peu près, & être ensuite en état de faire des corrections aux résultats donnés par les essais, ou de juger s'il y a des corrections qui méritent d'être faites. Voici comment je m'y suis pris. J'ai mesuré dans un Air temperé, la capacité d'un Matras avec de l'eau: 1200 mesures y ont été versées pour le remplir jusqu'à

qu'à l'endroit du col que j'ai marqué avec un fil. J'ai vuidé ce Matras, & vuide, je l'ai entouré d'eau que j'ai fait geler. Alors je l'ai rempli avec de l'eau, dont le froid étoit à peu près égal à celui des parois du vaſe, avec de l'eau prête à ſe glacer; 1199 meſures de cette eau ſe ſont élevées juſqu'au fil; donc la capacité étoit diminuée d'une meſure, ou de $\frac{1}{1200}$. La même voye n'a pas auſſi bien réuſſi, pour meſurer l'augmentation produite par l'eau bouillante, parce qu'il eſt difficile de remplir les petites meſures avec une eau extrêmement chaude; une autre y a ſuppléé en quelque ſorte: le Matras plein d'eau juſqu'au fil, a été plongé bruſquement dans l'eau bouillante, & heureuſement, il ne s'eſt point caſſé; l'eau a deſcendu ſur le champ dans le col du Matras. Il y a longtems que les Thermometres ont fait obſerver quelque choſe de pareil, qu'on a vu que leur liqueur, loin de monter, deſcend, lorſqu'on échauffe ſubitement leur boule. On ſait auſſi que ſi la liqueur deſcend alors, que c'eſt que les parois de la boule ſont échauffées, avant que la liqueur qu'elle contient, l'ait été ſenſiblement; que ſa capacité eſt augmentée, avant que le volume de la liqueur ait eu le tems de croitre. Dans notre expérience, notre Eſprit de Vin eſt deſcendu d'une meſure, ou environ: donc la capacité du Matras a été augmentée d'une meſure; d'où il ſuit que ſi on néglige d'eſtimer la dilatation & la contraction du vaſe, qu'un Eſprit de Vin, dont l'étendue de la dilatabilité auroit été priſe dans ce cas de 400 à 435, ou de 1200 à 1305,

ſera

ſera de 1199 à 1306, ſi on tient compte, comme on le doit, de ce dont la capacité du Matras ſe reſſerre & ſe dilate. Au-lieu de meſurer cette capacité dans l'Air temperé, on peut la meſurer dans l'eau gelée, & avec de l'eau prête à geler, comme nous venons de le faire, & ulors le fil marquera réellement un volume de 1200 parties ou meſures dans le tems de la congélation. Pour rectifier ce que l'eſſai donnera, il n'y aura donc qu'à ajouter ce que l'augmentation du volume du vaſe exige qu'on y ajoute, ce qui n'ira qu'à une meſure ſur l'accroiſſement qu'a paru recevoir un volume de 1200, & à peu près à $\frac{1}{3}$ de meſure ſur un volume de 400. Ainſi le volume d'Eſprit de Vin, qui condenſé feroit 400, & trouvé par l'eſſai 435, devroit être eſtimé de 435 $\frac{1}{3}$. Il faut pourtant remarquer que ce ſeroit trop ajouter au volume de 400, que le tiers d'augmentation de celui de 1200 : car les dilatations produites dans les boules par la chaleur, ſuivent le rapport des diametres, ou des circonferences de ces boules, & les capacités des boules ſont en raiſon des cubes des diametres augmentés.

Pour avoir des Thermometres, dont les degrés fuſſent exactement & commodément comparables en tout Païs, il ſeroit néceſſaire que les Savans vouluſſent bien convenir du choix d'un Eſprit; qu'ils exigeaſſent que tous les Thermometres fuſſent remplis de celui qu'ils auroient jugé le plus convenable. Leur choix ne devroit pas tomber, ce me ſemble, ſur un Eſprit de Vin très rectifié; on ne pourroit pas en recouvrer de tel par-tout. Un

dont la dilatation comprise entre nos deux termes est de 32 mesures sur 400, est plus foible que ceux qui se trouvent communément; il seroit toujours aisé d'en avoir de tel, ou de ramener à cette condition ceux qui seroient plus forts. Les huit mesures de dilatation, qu'il donne sur 100, est un nombre dont le partage est commode, c'est ce qui m'a déterminé à le faire employer jusqu'à ce qu'on paroisse incliner davantage pour un autre, soit plus fort, soit plus foible.

Mais quel que soit l'Esprit de Vin en faveur duquel on se détermine, on n'obmettra pas d'écrire son degré de dilatabilité sur la planche du Thermometre. On écrira, par exemple, en-haut: *Esprit de Vin, dont le volume condensé par la congélation de l'eau est* 1000, *& raréfié par l'eau bouillante est* 1080. Dans ce cas, si le Thermometre a assez de hauteur, le degré de dilatation marque d'un côté 80, & de l'autre 1080 sera le terme de l'eau bouillante. Si la hauteur du Thermometre n'a pas permis d'écrire jusques-là la suite des degrés, on verra ceux qui manquent à cette suite. Il importe peu d'ailleurs qu'elle se trouve entiere sur les Thermometres, qui ne doivent nous apprendre que la temperature de l'Air; jamais sa chaleur n'approche de celle de l'eau qui bout.

Lorsqu'on aura de l'Esprit de Vin, dont l'étendue de la dilatabilité surpassera celle que l'on veut à celui qui doit remplir le Thermometre, on diminuera la dilatabilité du premier; on la réduira à devenir égale à celle de l'autre, en mêlant de l'eau avec l'Esprit de

Vin

Vin trop fort ou trop dilatable. On y parviendroit par des tâtonnemens, mais dès qu'on connoit le degré de dilatabilité de l'Esprit de Vin, & qu'on a celui de l'eau, il est aisé de trouver en quelle proportion l'alliage doit être fait pour que la liqueur composée, l'Esprit de Vin affoibli, n'ait précisément qu'un certain degré de dilatabilité moyen, tel qu'on le voudra. En voici la règle.

Soit prise la difference entre la dilatabilité de l'eau, & la dilatabité moyenne qu'on veut avoir.

Soit prise aussi la difference entre cette dilatabilité moyenne, & celle de l'Esprit de Vin donné.

Si on mêle un nombre de mesures d'Esprit de Vin égal au nombre exprimé par la difference entre la dilatabilité de l'eau & la moyenne, avec un nombre de parties d'eau égal au nombre qui exprime la difference entre la dilatabilité de l'Esprit de Vin donné & la moyenne, on aura un Esprit de Vin affoibli, dont la dilatabilité sera celle qu'on veut avoir. Par exemple, on a un Esprit de Vin, dont la dilatabilité est de 35 mesures sur 400; & on en veut un, dont la dilatabilité soit seulement de 30 sur 400. Je suppose la dilatabilité de l'eau exactement de 15 sur 400. Cela étant, la dilatabilité moyenne qu'on veut avoir est 30.

La difference entre la dilatabilité de l'eau, & la moyenne, est donc 30 moins 15, ou 15.

La difference entre la dilatabilité de l'Esprit de Vin qu'on a, & la moyenne qu'on lui veut, est 35 moins 30, ou 5.

La règle eſt de mêler 15 meſures d'Eſprit de Vin avec 5 meſures d'eau, & l'Eſprit de Vin affoibli par cet alliage n'aura que 30 meſures de dilatabilité.

L'uſage de cette règle ſera également ſimple pour tous les autres cas.

Quand la difference des qualités des Eſprits de Vin de deux Thermometres ſera connue, on pourra faire une ſorte de comparaiſon des degrés de ces Thermometres, mais ce ne ſera qu'une ſorte de comparaiſon; indépendamment de la peine du calcul, qui pourroit avoir ſes difficultés, elle ne ſauroit être exacte. Une Obſervation que nous n'avons pas encore rapportée, & digne de l'être, va apprendre pourquoi il ſeroit difficile de ramener à des meſures ſemblables les degrés des Thermometres qui contiennent des Eſprits de Vin de differentes qualités; c'eſt que les degrés de raréfaction de l'eau ne ſont pas, à beaucoup près, proportionnels aux degrés de raréfaction de l'Eſprit de Vin. Pour l'expliquer & le prouver en même tems par un exemple, je prends un Eſprit de Vin qui, depuis le terme de la congélation juſqu'à celui de la chaleur de l'eau bouillante, ſe dilate de 30 meſures; & de l'eau qui, du premier des deux termes au ſecond, ſe dilate de 15. La ſomme des dilatations d'une des liqueurs eſt à la ſomme des dilatations de l'autre, comme 2 à 1; mais les degrés par où elles paſſent l'une & l'autre, pendant que certains degrés de chaleur agiſſent ſur elles, ne ſont pas dans cette proportion, à beaucoup près. Une après-midi d'un de nos jours d'Eté,

d'Eté, assez chaud, je mis dans un Matras 400 mesures d'eau, & j'exposai ensuite ce Matras au froid de la congélation artificielle. Ce froid ne fit descendre l'eau, ne la condensa que d'une demi-mesure ou environ. Le retrécissement du vase la faisoit paroître, à la vérité, moins condensée qu'elle n'étoit, mais les Expériences rapportées ci-devant ont prouvé que ce ne pouvoit être que de $\frac{1}{3}$ de mesure: supposons pourtant que ce fut d'une demi-mesure: ainsi l'eau s'étoit au plus condensée d'une mesure entiere. L'Esprit de Vin auquel je la compare, exposé au même froid, est descendu de près de 10 mesures. Pendant que l'eau s'est condensée d'une mesure, l'Esprit de Vin s'est donc condensé de 10; desorte que dans l'intervalle qui est depuis la congélation de l'eau, jusqu'à une chaleur assez considerable pour les Habitans de Paris, l'eau se raréfie au plus d'une mesure, pendant que l'Esprit de Vin se raréfie de 10 des mêmes mesures. Le rapport de la raréfaction de l'eau à la raréfaction de cet Esprit de Vin dans cet intervalle, est donc à peu près comme 1 à 10; au-lieu que la dilatation de l'eau, depuis la congélation jusqu'à la chaleur de l'eau bouillante, est à la dilatation du même Esprit de Vin entre ces deux termes, comme 1 à 2.

Dès que l'eau est si peu dilatée par une suite de degrés de chaleur, qui dilatent assez considerablement l'Esprit de Vin, & qu'une autre suite de plus grands degrés de chaleur ramenent pourtant le rapport entre la dilatation de l'eau & celle de l'Esprit de Vin à être comme 1 à 2, il y a des degrés d'une

chaleur forte, qui compenſent le peu d'effet des degrés d'une chaleur foible. Peut-être s'en trouve-t-il entre les degrés forts, qui dilatent autant, ou preſque autant l'eau, qu'ils dilatent l'Eſprit de Vin.

De tout ceci on doit conclurre, que ſi deux Thermometres ſont remplis de deux Eſprits de Vin de differente dilatabilité, qu'on ſe tromperoit extrêmement ſi on évaluoit le rapport du nombre des degrés que l'un & l'autre doivent marquer, expoſés à un Air de même, ou de differente temperature, ſi, dis-je, on évaluoit ce rapport ſur celui de l'étendue du degré de dilatabilité des deux Eſprits de Vin. Pour voir combien l'erreur pourroit être conſidérable, fixons-nous encore à un exemple, ſavoir, à deux Thermometres tels que l'Eſprit de Vin de l'un réduit à 400 meſures par la congélation, devienne 435 par la chaleur de l'eau bouillante; & que l'autre Thermometre ſoit rempli d'Eſprit de Vin foible, ou d'Eau-de-vie, dont le volume condenſé par la congélation étant 400, devient 425, lorſqu'il eſt dilaté par l'eau bouillante. Les jeux de ces Thermometres, les étendues de chemins qu'y parcourent les liqueurs, devroient être dans le rapport de 35 à 25. Cela ſera vrai auſſi, ſi on prend le chemin depuis le terme de la congélation de l'eau juſqu'à celui de l'eau bouillante. Mais prenons-le depuis le terme de la congélation juſqu'à une grande chaleur pour de l'Air qui doit être reſpiré, mais très differente de celle que le feu donne à l'eau prête à bouillir. Suppoſons, par exemple, que le premier Ther-

Thermometre, celui qui eſt rempli de 1000 meſures du plus fort des deux Eſprits de Vin, marque 35 degrés; il s'en faudra bien que l'autre, qui eſt rempli de 1000 meſures de l'Eſprit de Vin foible, ne marque 25 degrés; car l'Eau-de-vie, ou l'Eſprit de Vin foible, dont le degré de dilatation eſt 25 ſur 400, eſt un mêlange de parties égales d'eau & d'Eſprit de Vin, dont la dilatation eſt 35 ſur 400. Or ſi nous ſuppoſons pour un inſtant que la dilatation de l'eau, qui eſt très petite, pendant que le premier Thermometre parcourt 35 degrés, eſt nulle, notre ſecond Thermometre ne ſe doit dilater que comme s'il étoit composé de 500 meſures de l'Eſprit de Vin, tel que celui du premier. Si donc dans le premier 1000 meſures de volume donnent 35 degrés dans une certaine temperature d'Air, 500 meſures, qui eſt la quantité réelle de l'Eſprit du ſecond Thermometre, ne donneront que 17 degrés $\frac{1}{2}$; ou ſi l'on veut ajouter le demi-degré, ou le degré, qui peut être ſurvenu aux 500 meſures d'eau, la dilatation ſera de 18 ou 18 degrés $\frac{1}{2}$: au lieu donc que le nombre des degrés du premier, entre les termes de la congélation & de la chaleur de l'eau bouillante, eſt au nombre des degrés du ſecond comme 35 à 25, entre nos deux autres termes il y ſera comme 35 à 18 ou à 18 $\frac{1}{2}$.

Il ſuit pourtant, même de ce que nous venons de dire, que l'on pourra faire une ſorte de comparaiſon des degrés de deux Thermometres remplis de differens Eſprits de Vin dont on connoit le rapport de dilatabilité, &

que cette comparaiſon s'éloignera peu de l'exactitude, tant que les degrés n'exprimeront pas un degré de chaleur d'Air exceſſive; car connoiſſant les rapports de dilatabilité des deux Eſprits de Vin, on connoit aiſément, par la règle donnée ci-deſſus, la quantité d'eau qui étant ajoutée au plus fort, le ramene à l'état du plus foible, & on conſidere l'effet du Thermometre rempli de l'Eſprit de Vin le plus foible, comme s'il étoit ſeulement occupé par un volume d'Eſprit de Vin le plus fort, tel que ſeroit ce volume, ſi on eût retranché du volume total l'eau qui y entre, comme on l'a fait dans l'exemple précédent. Deux Obſervateurs, dans des Païs éloignés, ont à comparer leurs Obſervations faites ſur deux Thermometres qui ont chacun 1000 meſures condenſées par la congélation; mais les 1000 meſures de l'un ſe dilatent par l'eau bouillante de 87 degrés $\frac{1}{2}$, & celles de l'autre ſeulement de 62 $\frac{1}{2}$. On ſait bientôt que l'Eſprit de Vin affoibli, qui ne ſe dilateroit que de 62 $\frac{1}{2}$, ne contient que 500 parties d'Eſprit de Vin qui ſur 400 ſe dilate de 35; que par conſéquent en regardant comme nulle la dilatation de l'eau qui y eſt mêlée, les degrés de ce Thermometre doivent être à ceux du Thermometre de 1000 comme 500 eſt à 1000, comme 1 à 2, excepté ce qu'on évaluera devoir être ajouté pour la dilatation de 500 meſures d'eau.

Une remarque que nous ne devons pas obmettre, c'eſt que toutes les Tables ou Echelles de degrés de chaleur qu'on a voulu faire juſqu'ici, & que toutes celles qu'on pourroit faire, ne nous donneront jamais des rapports entre les differens degrés de chaleur

que

que nous puissions regarder comme des rapports véritables ; en un mot, que les degrés de chaleur ne sont point entre eux comme les degrés de dilatation des differentes liqueurs. Car si on établissoit sa Table des degrés de chaleur sur la dilatation de l'eau, certains degrés, dans cette Table, se trouveroient très proches les uns des autres, ne differer que par de petites augmentations du volume de ce liquide, qui differeroient beaucoup si la Table étoit construite sur des degrés de dilatation de l'Esprit de Vin. Differentes autres liqueurs donneroient aussi sans doute d'autres differens intervalles, & feroient juger autrement des rapports des differens degrés de chaleur.

Nous ne pouvons nous refuser ici encore à une autre remarque, un peu étrangere à notre sujet, mais à laquelle il nous conduit; c'est que la dilatabilité de la partie spiritueuse, de la partie inflammable, de l'Esprit de Vin, est beaucoup plus grande qu'il ne pourroit sembler, & peut-être plus grande que celle de toute matiere à nous connue, sans en excepter l'Air. Il s'en faut bien que l'Esprit de Vin le plus rectifié que l'Art sait nous donner soit une huile pure, nullement mêlangée avec du flegme. Des Expériences, faites avec grand soin par M. Geoffroy le jeune, ont appris que l'eau étoit plus de la moitié du poids de ce qu'on appelle de très bon Esprit de Vin, & nous laissent imaginer qu'elle en est une partie beaucoup plus considerable. Or si nous supposons que l'huile, la matiere inflammable, n'est que le quart d'un

volume d'Esprit de Vin, qui condensé par la glace artificielle est 400, & raréfiée par la chaleur de l'eau bouillante est 436, l'eau ou le flegme sont les trois quarts de ce volume. Mais si la raréfaction dont ce flegme est susceptible, est prise pour égale à celle de notre eau, ce qui doit être à peu de chose près, on trouvera que l'étendue de la dilatabilité de la partie inflammable est de 24 mesures $\frac{3}{4}$ sur 100 mesures, ou de 99 sur 400; car le volume 400 d'Esprit de Vin est alors composé de 300 parties d'eau & de 100 parties d'huile, ou de matiere inflammable; or les 300 parties d'eau ne peuvent être dilatées que de 15 mesures. La dilatation totale de l'Esprit de Vin étant de 36, il faut donc que les 100 parties d'huile ou de matiere inflammable fournissent les 24 mesures $\frac{1}{4}$ nécessaires pour remplir le nombre de 36 mesures.

Nous sommes bien éloignés de croire que nous ayons supposé la quantité de la matiere inflammable trop petite, en ne la prenant que pour le quart du volume d'Esprit de Vin: nous sommes même disposés à penser qu'en supposant que la matiere proprement inflammable n'est que la huitieme, ou même que la seizieme partie de ce mêlange, nous nous tromperons plutôt pour lui en accorder trop, que pour lui en accorder trop peu. En raisonnant comme nous l'avons fait ci-dessus, il est aisé de trouver dans ces cas de combien la matiere inflammable est raréfiée par l'eau bouillante. En supposant qu'elle n'est qu'une huitieme portion du volume, 100 mesures se dilatent de 45 mesures $\frac{1}{4}$; & en supposant qu'el-

qu'elle n'eſt que la ſeizieme partie du volume, on trouvera que 100 meſures ſe dilatent de 87 meſures $\frac{1}{4}$. Voilà la partie ſpiritueuſe ou inflammable conduite à ſe dilater de près du double par la chaleur de l'eau bouillante; & s'il étoit vrai, comme bien des Phyſiciens feront enclins à le croire, qu'elle fût encore une portion beaucoup plus petite du volume de l'Eſprit de Vin, que la derniere à laquelle nous nous ſommes arrêtés, juſqu'où n'ira point ſon degré de dilatabilité, borné par le ſimple terme de la chaleur de l'eau bouillante? Auſſi eſt-il à croire que la matiere inflammable a une prodigieuſe diſpoſition à ſe raréfier. Quelle étendue n'occupe pas la Poudre quand elle s'enflamme, ou ſe raréfie au dernier point? Je ſai qu'on a voulu donner à la raréfaction de l'Air celle de la Poudre à Canon, mais la matiere inflammable eſt par elle-même peut-être beaucoup plus raréfiable que l'Air. L'Air ordinaire ne ſe dilate pas autant par l'eau bouillante; & ſi l'on veut attribuer à l'Air même la dilatabilité de l'Eſprit de Vin, il faut ſuppoſer que celui qu'il contient eſt prodigieuſement condenſé. Auſſi, quoique l'eau contienne beaucoup d'Air, & peut-être autant & plus que l'Eſprit de Vin, l'eau n'eſt que très peu raréfiable en comparaiſon de ce que l'eſt la partie ſpiritueuſe de l'Eſprit de Vin.

Mais pour revenir à nos Thermometres, nous avons regardé comme un principe certain, que l'exactitude de leur graduation demandoit que leurs Tubes fuſſent gros, & que plus les Tubes ſeroient gros, & plus il ſe-

feroit aifé de les graduer parfaitement. La groffeur des Tuyaux engage à une augmentation proportionnelle de celle des Boules. Mais nous ne pouvons diffimuler une imperfection à craindre pour les Thermometres à groffes Boules. Il y a une forte de fenfibilité, qu'ils ne fauroient avoir auffi grande que l'ont les Thermometres à petites Boules. Je diftingue dans les Thermometres deux efpeces de fenfibilité, dont la premiere fe mefure par la quantité de chemin que parcourt la liqueur dans le Tube, pendant qu'il fe fait un certain changement dans la temperature de l'Air. Comme celle-ci dépend de la proportion du diametre de la Boule à celui du Tube, elle peut également fe trouver dans les Thermometres à groffes Boules, & dans les Thermometres à petites Boules.

Mais il y a une autre efpece de fenfibilité dans les Thermometres, qui feule même mériteroit ce nom; elle confifte véritablement dans un fentiment plus exquis, en ce qu'un Thermometre, plus fenfible qu'un autre aux changemens de chaud & froid, nous apprend plutôt ceux qui fe font faits dans l'Air. Les Thermometres à Air l'emportent en ce genre de fenfibilité fur ceux à Efprit de Vin; l'Air reçoit plus vîte les impreffions du chaud & du froid, que l'Efprit de Vin le plus rectifié ne les peut recevoir. Or entre les Thermometres à Efprit de Vin, ceux-là feront les plus fenfibles dans ce point de vue, dont les Boules feront plus petites. Les changemens du froid au chaud, d'un degré de chaud à un autre degré de chaud plus grand, fe font dans

dans l'Air avant de se faire dans la liqueur du Thermometre. L'Air, plus chaud que les corps qu'il touche, leur communique de sa chaleur; la Boule du Thermometre partage avec la couche d'Esprit de Vin appliquée contre sa surface, les impressions de chaleur qu'elle a reçues; cette premiere couche d'Esprit de Vin partage la sienne avec la seconde couche; ainsi la chaleur, distribuée de couches en couches, est moins grande vers le centre de la Boule d'Esprit de Vin que vers sa surface, & est d'autant moins grande que la Boule a plus de diametre. Il en est ici comme du feu qu'on allume autour de deux vases, dont l'un est grand, & l'autre petit; quoiqu'on le fasse agir également sur toute la surface des deux vases, la liqueur contenue dans le petit, bouillira plutôt que celle qui sera contenue dans le grand. Aussi, si la Boule étoit supposée grosse jusqu'à un certain point, il se feroit souvent des changemens du froid au chaud & du chaud au froid, qui ne seroient pas marqués dans toute leur étendue par le Thermometre: car il faudroit alors un tems assez considerable avant que l'Esprit de Vin placé près du centre de la Boule, eût pris le degré de chaleur de l'Air extérieur; & s'il arrive qu'avant d'avoir pris ce degré de chaleur, l'Air commence à se refroidir, la liqueur de la Boule se refroidira avant d'avoir pris un degré de chaleur égal à celui que l'Air avoit ci-devant. Les passages du froid au chaud sont souvent si subits, l'Air qui nous environne reste pendant si peu de tems dans un même état, qu'il est même à croire que les Thermometres à plus petites Boules ne don-

nent que très rarement toute l'étendue du froid ou du chaud de l'Air; & cet inconvénient est encore plus grand pour les Thermometres à grosses Boules.

Mais le remede qu'on peut apporter à ce défaut des Thermometres à grosses Boules est bien simple. Rien n'exige que la partie que nous nommons la Boule du Thermometre, soit une Boule. Toute figure lui est bonne. Tout ce qui y est essentiel, c'est qu'elle ait une certaine capacité. Qu'on lui donne la forme d'une Boîte applatie, ou d'une Lentille, dont les parois laissent entre eux une distance moindre que n'est le diametre des Boules des petits Thermometres, & alors on rendra les Thermometres à gros Tubes aussi sensibles, & même plus sensibles, que ne le sont ceux à petites Boules. Plus on applatira les Boîtes, plus on augmentera la sensibilité de la seconde espece. Celle de la premiere sera aussi toujours telle qu'on la voudra; car en augmentant la grandeur des Boîtes, on est toujours maitre de les rendre d'une assez grande capacité. Il est vrai que dès qu'elles auront une telle figure, qu'il ne sera peut-être pas possible de les faire faire par ceux qui soufflent des Boules à la Lampe: mais il est assez indifferent à ceux qui ont besoin de Thermometres, qu'on fasse dans les Verreries les Boîtes & les Tubes, ou qu'on n'y fasse que les seuls Tuyaux, comme on les y a toujours faits. Si pourtant les Boules n'excedent pas quatre pouces de diametre, la marche de la liqueur des Tubes ne sera pas longtems à se fixer au terme correspondant à celui que donne une petite Boule;

cela

cela ne ſauroit aller à un quart d'heure, ni même à un demi-quart d'heure, ſelon les Expériences que j'en ai faites. Enfin, au-lieu de prendre pour la Boîte une Boule d'un ſi grand diametre, on peut en prendre de forme cylindrique. Elle peut être un gros Tuyau qui n'aura qu'autant de diametre, & même moins que n'en ont les Boules des Thermometres ordinaires; on déterminera ſa hauteur ſur la capacité qui convient à la quantité de liqueur qu'elle doit contenir.

Le plus & le moins de ſenſibilité de la ſeconde eſpece ſera quelquefois cauſe que les marches de divers Thermometres, qui devroient être les mêmes, paroîtront differentes. Qu'en deux heures il ſe faſſe dans l'Air un changement de chaleur capable de faire monter la liqueur d'un degré & demi, peu après ces deux heures le Thermometre le plus ſenſible marquera ce degré & demi de plus, pendant que celui qui eſt moins ſenſible ne ſera peut-être élevé que d'un degré. Mais ſi la chaleur de l'Air reſte conſtante pendant quelque tems, le premier ſe ſoutiendra au même point, & le ſecond arrivera à un point ſemblable. De-là il ſuit que les tems les moins équivoques pour juger de l'état de la temperature de l'Air par les Thermometres, ce ſont ceux où la liqueur eſt reſtée au même degré d'élevation pendant un quart d'heure, ou environ.

M. Taglini, Profeſſeur à Piſe, a fait imprimer, en 1725, une Theſe ſur les Thermometres, qui eſt dans un tout autre goût que celles qui paroiſſent ſi ſouvent dans nos Col-

Colleges; elle n'a la forme de Theſe que par ſes Poſitions. C'eſt un petit Ouvrage où on a ſoigneuſement raſſemblé & diſcuté tout ce qui a rapport aux Thermometres. Nous n'acquieſcerons pourtant pas à toutes ſes aſſertions, & ſur-tout à la derniere, elle eſt trop directement contraire aux principes ſur lesquels nous avons cherché à conſtruire des Thermometres dont les degrés de chaud & de froid fuſſent comparables; elle ôte même toute eſperance d'en avoir jamais de tels. Il y ſoutient que les degrés fixes de chaud & de froid, que les Phyſiciens ont cherché juſqu'ici, n'ont point encore été trouvés, & qu'il eſt impoſſible de les trouver. Des deux pourtant que nous avons pris pour termes, il n'y en a qu'un qui y ſoit attaqué directement, celui de chaleur déterminé par l'eau bouillante. Il combat, à la vérité, les degrés fixes qu'on voudroit établir par le froid de la glace, & même par la congélation produite par le froid de l'Air: mais il ne dit rien contre le froid de la glace artificielle faite dans un tems où l'Air fondroit vîte la glace naturelle; & nous croyons avoir prouvé ci-deſſus, que le degré de froid de cette glace artificielle ne doit pas être confondu avec celui de toute autre glace, & qu'il pouvoit être regardé comme un terme fixe. Nous avouerons pourtant que ce terme de froid, ou de moindre chaleur, ne nous paroît pas plus fixe que celui de l'eau bouillante, que M. Taglini ne veut pas reconnoitre pour tel, & que j'euſſe cru hors de toute atteinte. La Théorie eût dû même nous apprendre, quand on

on a eu besoin d'un degré de chaleur fixe, que nous le pouvions trouver là. Mais il n'arrive que trop souvent, à notre honte, que nous devons à des Expériences faites assez tard, des connoissances où le raisonnement eût dû nous conduire de bonne heure. Sans être Physicien, on a toujours sû que de l'eau-bouillante est moins chaude que l'Huile bouillante, que du Plomb, que du Cuivre, que du Fer, que de l'Argent, fondus jusqu'à bouillir. On a donc toujours reconnu qu'il y avoit des degrés de chaleur où l'eau ne pouvoit atteindre; il y en a donc un qu'elle ne sauroit passer, & par conséquent qui est un degré fixe. Peut-être a-t-on eu tort de croire que l'eau soit arrivée à ce degré de chaleur, dès qu'il commence à s'en élever quelques bouillons. C'est ce que prouveroit tout au plus l'Expérience rapportée par M. Taglini, qui lui a fait voir que l'eau, qui étoit contenue dans une Boule adaptée à un Tuyau de verre, ne s'étoit élevée qu'à une certaine hauteur, la Boule ayant été mise dans un pot où de l'eau bouilloit, & qu'ayant forcé l'eau du pot à bouillir plus fort, l'eau du Tube s'y étoit élevée plus haut, & si haut qu'elle étoit même sortie hors de ce Tube. Si le diametre de la Boule eût été moins grand par rapport à celui du Tube, ou que le Tube eût eu plus de hauteur, l'eau seroit toujours restée dans le Tube; & quand elle auroit été arrivée à un certain terme, elle y seroit restée, quelque chose qu'il eût fait pour augmenter la force des bouillonnemens de l'eau du pot. C'est ce que j'ai éprouve

vé sur des Boules de quatre pouces & demi, adaptées à de gros Tubes de plus de six pieds de long. J'ai aussi éprouvé qu'il falloit laisser la Boule pendant un tems assez considerable dans l'eau bouillante, avant que celle du Tube montât jusqu'où elle peut monter, au moins plus d'un quart d'heure, parce que l'eau qui monte dans le Tube s'y refroidit.

Le savant Professeur n'a obmis aucune des raisons capables de faire douter du terme fixe donné par l'eau bouillante, ou au moins de faire douter si ce terme est saisissable. Il fait observer combien les eaux diffèrent les unes des autres; que leurs differences en pesanteur sont connues, & nous en doivent faire imaginer dans leurs compositions: que de-là il suit que le degré de chaleur qui suffit pour faire bouillir une certaine eau, ne suffit pas, ou est plus que suffisant pour en faire bouillir d'autres. Tout cèla a bien l'air d'être vrai: mais en conclurons-nous qu'il faut caractériser par le poids, ou par d'autres moyens, l'espece d'eau dont nous nous servirons pour marquer le terme de chaleur de l'eau qui bout, comme nous l'avons fait pour l'Esprit de Vin? Ce seroit au pis aller à quoi nous serions réduits: mais il y a bien de l'apparence que cette précaution seroit très inutile. Tant qu'on s'en tiendra à des eaux communes, ce que l'une aura de chaleur plus que l'autre, lorsqu'elle bouillira, ne donnera pas apparemment des differences saisissables. Quand il s'agit de mesures sensibles, nous n'avons besoin que d'égalités sensibles. L'impossibilité d'avoir des mesures exactes, de quelque espece que ce soit,

ſoit, ſe prouveroit très ſolidement; peut-être n'y a-t-il jamais eu deux poids de marc, deux aulnes, &c. d'une égalité parfaite. Des meſures qu'on feroit parfaitement égales, ceſſeroient de l'être ſelon que la chaleur, la ſechereſſe ou l'humidité de l'Air agiroient ſur elles. Nous avons pourtant des meſures de tout genre d'une juſteſſe qui nous ſuffit, parce qu'elle eſt telle qu'il n'en réſulte pas des inégalités importantes.

Après tout, j'avouerai ſans peine, que je n'eſpere pas qu'on conſtruiſe beaucoup de Thermometres dont les degrés ſoient exactement égaux, ou exactement proportionnels. Les Barometres ſimples, tout ſimples qu'ils ſont, n'ont pas toujours des marches parfaitement égales; mais il ſera aiſé de faire des Thermometres qui differeront peu ſenſiblement, & qui nous donneront des idées des degrés de froid & de chaud, à peu près auſſi exactes que nous avons beſoin de les avoir. Il en ſera de ces inſtrumens comme de tous les autres ouvrages de l'Art; on les fera d'autant plus parfaits, qu'on apportera plus d'attention à les conſtruire, que des mains plus adroites & plus exercées s'y occuperont. Ceux que j'ai fait faire n'ont pas differé dans les rapports de leur marche de plus d'un quart de degré, & certainement mille gens feront mieux que je n'ai fait faire. Enfin, quand on ne pourroit pas remplir dans la derniere exactitude toutes les conditions demandées pour la perfection de nos Thermometres, au moins auroit-on toujours un à peu près, & alors on auroit des Thermometres bien ſupérieurs

à ceux à Esprit de Vin dont on se sert aujourd'hui, où tout est inconnu, capacité des Boules & des Tubes, valeur des degrés, & qualité de la liqueur.

Si la grandeur de nos nouveaux Thermometres déplait, on pourra par leur moyen en avoir d'aussi petits qu'on souhaitera, dont la graduation sera proportionnelle à celle des grands; on les remplira du même Esprit de Vin, & on se servira des grands comme d'Etalons pour graduer les petits. On pourra même construire des Thermometres assez petits, en les mesurant réellement comme nous avons appris à mesurer ceux d'un plus grand volume, à cela près que les divisions n'en seront bien précises que de cinq en cinq degrés; par exemple, au-lieu de les graduer avec une mesure d'un degré, on les graduera avec une mesure de cinq degrés. Tous les termes de cinq en cinq seront donc exactement déterminés. On divisera chacun de ces espaces en cinq parties, pour faire autant de degrés intermédiaires; & cette façon de diviser ne produira pas d'erreurs sensibles dans ces petits instrumens.

Au reste, quand on a voulu nier l'existence, & même la possibilité de tout degré de chaleur fixe, on n'a pas pensé que les Physiciens de Paris en ont un très commode dans les Caves de l'Observatoire. C'est, à la vérité, un fait bien singulier, & un de ceux qu'on n'auroit pas prévu, que des Caves dont la profondeur n'est pas extrême, & dont la longueur n'est pas excessive, & à qui on ne s'est pas embarrassé d'ôter toute communi-

cation

cation avec l'Air-extérieur, que ces Caves, dis-je, renferment un Air dont la temperature est toujours sensiblement la même. Les épreuves qu'on en a faites sont pourtant démonstratives; M. de la Hire a observé que dans les plus grandes chaleurs de nos Etés, & dans le plus grand froid de 17 9, la liqueur du Thermometre est restée assez constamment sur le même degré; aussi ce degré de temperature des Caves de l'Observatoire est-il un des termes qu'on a pris soin de marquer sur les meilleurs des Thermometres qu'on a faits jusqu'ici. Un des premiers usages qu'on a cru devoir faire des Thermometres construits sur les principes que nous avons donnés, a été de le reconnoitre. On a trouvé que le degré de chaleur de ces Caves étoit à 10 degrés $\frac{1}{4}$ au-dessus du terme de la congélation; dans un Thermometre dont le volume de la liqueur condensée par la congélation artificielle étoit 1000, & dont le volume de cette liqueur dilatée par l'eau bouillante étoit 1080; ou, ce qui revient au même, le volume de la liqueur de ce Thermometre, qui est réduit à 1000 par la congélation de l'eau, est 1010 $\frac{1}{4}$ dans les Caves de l'Observatoire.

Nous pourrons de même, par le moyen des nouveaux Thermometres, ramener à des degrés connus & comparables les Observations faites ci-devant sur des Thermometres qui subsistent encore, tel qu'est celui de M. de la Hire, dont on se sert à l'Observatoire depuis tant d'années.

Lorsque nous n'avions ci-dessus pour objet

que

que la ſeule conſtruction du Thermometre, nous avons dit que nous ne croyions pas qu'il convînt de raréfier extrêmement l'Air qu'on renferme dans le Tube, ni de laiſſer cet Air dans l'état de condenſation qu'il a dans des tems froids; que ce qui nous paroiſſoit de mieux, eſt que l'Air y fût dilaté à peu près au point où il l'eſt dans les jours les plus chauds. Les raiſons qui nous ont déterminé à prendre ce parti moyen, ſont aiſées à voir. Quand l'Eſprit de Vin ſe raréfie, l'Air contenu dans le Tube tend à ſe raréfier; il fait donc des efforts pour s'oppoſer à la dilatation de l'Eſprit de Vin, qui ne ſauroit ſe faire ſans condenſer l'Air; ces efforts pourroient briſer le Tube ou la Boule, lorſque la chaleur eſt conſiderable. Il ſemble auſſi y avoir un inconvénient, & beaucoup plus grand, à ne renfermer dans le Tube qu'un Air extrêmement raréfié. L'Air qui entre dans la compoſition de l'Eſprit de Vin, trouve alors de la facilité à s'en dégager; & s'il s'en dégage, l'Eſprit de Vin n'eſt plus préciſément le même que celui dont on a déterminé les qualités. Or que l'Air contenu dans l'Eſprit de Vin s'en dégage, ſi cet Eſprit de Vin eſt environné d'un Air trop raréfié, d'une eſpece de vuide, c'eſt ce qu'une Obſervation faite ſur nos Thermometres a montré très clairement. Après avoir fait prendre à l'Eſprit de Vin de la Boule d'un de ces Thermometres un degré de chaleur qui étoit peu au deſſous de celui de l'eau bouillante, je le couchai preſque horizontalement, je laiſſai refroidir la liqueur pendant qu'il étoit dans cette poſition.

tion. Bientôt le volume de l'Eſprit de Vin, renfermé dans la Boule, diminua; le vuide, qui ordinairement ſe fait dans le Tube, ſe fit alors dans la partie la plus élevée de la Boule; je le vis croître, devenir inſenſiblement un ſegment de ſphere de plus grand en plus grand. Mais à meſure que ce vuide croiſſoit, j'obſervois continuellement de petites bulles qui s'élevoient de toutes parts de la ſurface de l'Eſprit de Vin, & qui ſe réuniſſoient enſuite à la grande bulle. Ces bulles ne pouvoient être priſes que pour des bulles d'Air qui ſe dégageoient de l'Eſprit de Vin. Cette obſervation nous a conduit à en faire pluſieurs autres, que nous ne ſaurions placer ici ſans ajouter beaucoup à la longueur d'un Mémoire déja exceſſivement long; nous ne pourrions nous diſpenſer de les rapporter dans toute leur étendue: outre qu'elles ſont aſſez curieuſes par elles-mêmes, elles nous apprendront à conſtruire des Thermometres qui ne ſeront point ſujets à des dérangemens qu'on a vu arriver à ceux qu'on a conſtruits juſqu'ici, & dont les nôtres même ne ſeroient pas exempts.

Nous ferons ſeulement faire attention à la ſource des dérangemens dont nous voulons parler. On n'eſt pas certain ſi un Thermometre, après pluſieurs années, ou même après un tems plus court, eſt tel qu'il étoit dans le tems de ſa conſtruction. L'Eſprit de Vin peut perdre peu-à-peu, à la longue, cet Air qui s'en eſt ſéparé en un tems court dans l'Expérience que nous venons de rapporter; peut-être même que quelques-unes des parties

ties

ties des plus ſpiritueuſes de l'Eſprit de Vin s'élevent dans le Tube ; & y reſtent en vapeur; peut-être auſſi que l'Eſprit de Vin reprend l'Air qui l'avoit abandonné, comme nous voyons que l'eau ſe recharge avec le tems de celui qui en avoit été chaſſé pendant qu'elle bouilloit; & peut-être que de même les parties ſpiritueuſes qui ſe ſont élevées de l'Eſprit de Vin, viennent enſuite s'y réunir, qu'ainſi il ſe fait une ſorte de circulation qui entretient l'Eſprit de Vin renfermé toujours à peu près dans un même état. C'eſt ce qui a été difficile à décider juſqu'ici, & ce qui pourra l'être ſurement dans la ſuite. On n'aura qu'à expoſer la Boule d'un grand Thermometre à la congélation artificielle de l'eau, la ſurface de la liqueur ſe trouvera dans le Tube vis-à-vis la ligne marquée pour le terme de la congélation, s'il ne s'eſt fait aucun changement dans la liqueur depuis que le Thermometre a été conſtruit ; & s'il y eſt arrivé des changemens, elle ſera au deſſous & au-deſſus de ce terme, ſelon la nature des changemens. On a donc ainſi une méthode de s'aſſurer continuellement de l'état de ſon inſtrument, de le vérifier, & on ſait juſqu'où on doit compter ſur les Obſervations qu'il fournit.

Il ſeroit à ſouhaiter que les Phyſiciens de differens Païs puſſent avoir des Thermometres de cette eſpece, leurs Obſervations nous inſtruiroient alors chaque année ſur le plus grand chaud & le plus grand froid des differens climats. On ne ſe trouvera pas à portée par-tout de faire ſouffler des Boules ou des

Boîtes

Boîtes au bout des Tuyaux; mais pour peu qu'on puisse avoir des Tuyaux, & qu'on ait une sorte d'industrie, qui ne manque gueres à ceux qui aiment les recherches dont il s'agit, il sera aisé de se faire soi-même un Thermometre. On adaptera le Tube à quelque Bouteille de capacité convenable. Si on est arrêté par la difficulté de scêller ensemble le goulot de la Bouteille, & le bout inférieur du Tuyau, l'équivalent peut être fait par un lut, ou une espèce de colle sur laquelle l'Esprit de Vin n'ait pas prise; de la Gomme Arabique, de la colle de Poisson, qui se dissolvent si aisément à l'eau, ne se dissolvent point à l'Esprit de Vin. J'ai luté, avec l'une & l'autre de ces colles, des Tubes à des Bouteilles qui m'ont fait des Thermometres. Il y a lieu de croire qu'ils seront assez durables; c'est sur quoi on ne peut être instruit que par le tems, & sur quoi je ne le suis pas assez. Je ferai seulement remarquer, qu'extérieurement il faut couvrir de quelques couches d'un Vernis, qui résiste aux impressions de l'humidité, la surface de la colle: un simple Vernis de Lacque y suffira.

Mais inutilement aura-t-on en differens Païs des Thermometres bien construits sur les principes qui rendent leurs degrés comparables, la comparaison du chaud & du froid des differens Païs & des differentes saisons ne se fera jamais exactement, si ceux qui veulent bien se charger de faire les Observations qui y sont nécessaires, & de les communiquer au Public, ne sont attentifs à bien choisir les places où ils mettront leurs Thermo-

metres, au moins quelque tems avant d'observer leur marche. Dans une même Ville, dans une même Maison, on trouvera à la même heure de grandes differences entre les degrés de differens Thermometres, qui tous marqueroient pourtant le même s'ils étoient posés les uns à côté des autres. La liqueur de ceux qui seront dans des chambres, n'y fît-on jamais de feu, sera à des hauteurs fort differentes de celles où sera la liqueur des Thermometres qui seront exposés à l'Air libre; il y a tel jour où l'on verra la liqueur de ces derniers monter & descendre de 8 à 10 degrés, pendant que la liqueur des autres aura à peine monté ou descendu d'un degré. Il est donc absolument essentiel que l'Observateur expose son Thermometre à l'Air extérieur. L'exposition qu'il doit choisir est celle du Nord, & telle que le Soleil ne puisse donner dessus à aucune heure du jour. Ce ne sera pas même assez, si en rendant compte de ses Observations, il n'avertit s'il y a des murs voisins qui renvoyent les rayons du Soleil du côté du Thermometre, ou s'il n'y en a pas; si son Thermometre est placé à un premier, à un second, ou à un troisieme étage. Toutes ces circonstances sont essentielles à marquer pour mettre en état de faire d'exactes comparaisons. J'ai vu en Eté deux Thermometres, exposés à l'Air libre & au Nord, dans differentes Maisons, dont la liqueur de l'un étoit, dans les jours où le Soleil paroissoit, d'un degré ou d'un degré & demi plus élevée que celle de l'autre, parce que l'Air qui l'environnoit étoit échauf-

.12.

3

i i

o

Fig. 1.

o

Fig. 2.

chauffé par la réverberation des murs voisins. J'ai aussi observé, dans des jours chauds, que la liqueur d'un Thermometre mis à la fenêtre d'un rez-de-chaussée, étoit d'un degré plus bas que celle d'un autre qui étoit au premier étage, à la fenêtre au-dessus de la précédente. Cependant les Thermometres, dont je parle, étoient de ceux de nouvelle construction, & mis les uns à côté des autres auroient marqué les mêmes degrés. Les instrumens les plus parfaits demandent de l'habileté & de l'attention dans ceux qui s'en servent.

NOUVELLES PROPRIETÉS DE L'HYPERBOLE.

Par M. MAHIEU *.

LE dessein de ce Mémoire est de découvrir l'analogie qui est entre le Triangle, le Cercle & l'Hyperbole.

J'ai cru que cette comparaison pouvoit être utile, à cause que l'on ne connoit jamais bien ce que les choses sont en elles-mêmes, si l'on ne connoit aussi ce qu'elles sont considerées par rapport à celles à qui elles ressemblent, & dont elles tirent leur origine.

J'établis la comparaison que je fais du Triangle, du Cercle & de l'Hyperbole, sur un

* 23 Dec. 1730.

un principe qui eſt un Corollaire d'une Propoſition d'un Mémoire que j'ai préſenté à l'Académie en 1724. Ce principe fait remarquer que les coupées & les appliquées, priſes ſur l'aſymptote de l'Hyperbole, peuvent être repréſentées par une ſuite infinie de baſes changeantes qui appartiennent à des Triangles, qui pris deux à deux, ont deux côtés égaux, chacun à chacun. On verra dans les Mémoires ſuivans que cette proprieté eſt très étendue, & qu'elle continue à ſe faire remarquer juſques dans des Courbes d'un ordre plus élevé, dont les appliquées ſont les coordonnées priſes ſur l'aſymptote de l'Hyperbole, enſorte qu'on pourroit réciproquement faire uſage de l'Hyperbole pour décrire ces Courbes, & de ces Courbes pour décrire l'Hyperbole.

Au reſte, les principes de ce Mémoire ſont ſimples: quoique ſimples, ils conduiſent à une propoſition qui ſemble un véritable Paradoxe, qui eſt, Que deux eſpaces inégaux, l'un conſideré dans le Cercle, & l'autre dans l'Hyperbole, contiennent un même nombre de lignes égales. Je ferai voir dans les Mémoires ſuivans, que ce qui ſemble un paradoxe, ſe rencontre dans toutes les Courbes, en les comparant deux à deux de la même maniere que j'ai comparé le Cercle & l'Hyperbole; & je déduirai de cette comparaiſon de nouvelles Courbes, que je nommerai les *déplacées*.

LEM-

LEMME.

I. *Si quatre Triangles, comparés deux à deux, ont deux côtés égaux chacun à chacun, enſorte que la difference des quarrés des côtés des deux premiers Triangles ſoit égale à la difference des quarrés des côtés des deux autres Triangles, les baſes des deux premiers Triangles ſeront en raiſon réciproque avec les baſes des deux autres Triangles.*

1°. Si parmi les quatre angles qui ſont ſur les deux premieres baſes & ſur les deux dernieres, il y en a deux, qui pris enſemble, ſont égaux à deux droits.

2°. Si parmi les quatre angles qui ſont oppoſés aux deux premieres baſes & aux deux dernieres, il y en a deux qui ſont la difference de la ſomme des angles ſur la baſe des deux autres Triangles.

3°. S'il y a deux angles obliques égaux ſur les baſes, & deux inégaux.

4°. Si les perpendiculaires ou les éloignemens de perpendiculaires comparés deux à deux étant égaux, il ſe trouve parmi les quatre angles ſur les deux premieres baſes & ſur les deux dernieres deux angles inégaux ſemblablement poſés.

* Soit les quatre Triangles ACB, FHG, KLM, NPO, dont les deux premiers ACB, FHG, ont deux côtés $AC + CB$ égaux aux deux côtés $FH + HG$, & les deux derniers KLM, NPO, ont pareillement deux côtés $KL + LM$ égaux aux deux côtés $NP + PO$, en-

* Fig. 1. & 2.

enſorte que la difference des quarrés des côtés des deux derniers Triangles ſoit égale à la difference des quarrés des côtés des deux premiers Triangles.

Je dis que les baſes *AB*, *FG*, *KM*, *NO*, ſont en raiſon réciproque.

1°. Lorſque les deux angles quelconques *CBA*, *HGF*, pris enſemble, étant égaux à deux droits, les deux angles quelconques *LMK*, *PON*, pris enſemble, ſont pareillement égaux à deux droits.

2°. Lorſque l'angle *FHG* étant la difference des angles ſur la baſe du Triangle *ACB*, l'angle *NPO* eſt pareillement la difference des angles ſur la baſe du Triangle *KLM*.

3°. Lorſque l'angle quelconque *A* étant égal à l'angle *F*, l'angle quelconque *K* eſt pareillement égal à l'angle *N*.

4°. Lorſque les perpendiculaires *CE*, *HI*, ou les éloignemens de perpendiculaires, *AE*, *FI*, étant égaux, & les deux angles *CBA*, *HGF* inégaux, les deux perpendiculaires *LR*, *PS*, ou les deux éloignemens de perpendiculaires *KR*, *NS*, ſont pareillement égaux, & les deux angles *LMK*, *PON*, pareillement inégaux.

PREPARATION.

Pour ne faire qu'un ſeul cas des quatre, faites l'angle *ACD* égal à l'angle *FHG*, qui eſt la difference des angles ſur la baſe du Triangle *ACB*, & l'angle *KLQ* égal à *NPO*, qui eſt la difference des angles ſur la baſe du Triangle *KLM*; puiſque l'angle *ACD* eſt égal

égal à l'angle *FHG*, l'angle *CDB* est égal à l'angle *B*, par conséquent les lignes *CD*, *CB*, *GH*, sont égales, & les deux Triangles *ACD*, *FHG*, sont égaux en tout sens. D'où il suit que lorsque l'angle *FHG* est la difference des angles sur la base du Triangle *ACB*, l'angle *HGF*, ou son égal *CDA*, est le complément à deux droits de l'angle *CBD*.

On prouvera de même dans les autres cas qu'il y a toujours deux angles sur les deux premieres bases & sur les deux dernieres, qui, pris ensemble, sont égaux à deux droits.

DEMONSTRATION.

Dans les Triangles *ACB*, *AB* est la somme des éloignemens de perpendiculaires, *AD* ou *FG* en est la difference; par conséquent $\overline{AC}^2 - \overline{CB}^2 = AB \times FG$. On prouvera de même que $\overline{KL}^2 - \overline{LM}^2 = KM \times NO$: or (*hyp.*) $\overline{KL}^2 - \overline{LM}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2$; donc $AB \times FG = KM \times NO$.

SCHOLIE.

II. Lorsque l'un des angles *B* est droit, l'angle *G* qui est son complément à deux droits est aussi droit, les lignes *AB*, *FG*, sont égales & moyennes proportionnelles entre *KM* & *NO*.

THEOREME I.

III. *Les coupées & les appliquées prises sur les*

 asympto-

asymptotes d'une portion déterminée de l'Hyperbole, peuvent être représentées par les bases croissantes & décroissantes d'une suite infinie de Triangles qui ont deux côtés égaux chacun à chacun.

DEMONSTRATION.

* La suite infinie des Triangles qui ont deux côtés égaux chacun à chacun, peut être représentée par les quatre Triangles *ACB*, *FHG*, *KLM*, *NPO*, qui ont deux côtés égaux chacun à chacun, & quatre angles sur les quatre bases, ensorte que les deux angles *CBA*, *HGF*, qui sont sur les deux premieres bases, étant égaux à deux droits, les deux *LMK*, *PON*, semblablement posés sur les deux dernieres bases soient pareillement égaux à deux droits, donc (*Hyp. & par Lem.* 1.) $AB \times FG = KM \times NO$. C'est pourquoi nommant *AB* (*a*), *FG* (*b*), *KM* (*x*), *NO* (*y*), si l'on substitue ces valeurs dans l'Equation, il vient $ab = xy$, qui est l'Equation de l'Hyperbole par rapport à ses asymptotes.

SCHOLIE I.

IV. La suite infinie des bases se partage en deux suites infinies; celle qui est la suite des bases qui ont deux angles aigus, représente les coupées; celle qui est la suite des bases qui ont un angle obtus, représente les appliquées.

Con-

* Fig. 1. & 2.

* Concevez sur l'asymptote *AQ* les bases qui ont un angle obtus, que je nomme *y*, & sur l'asymptote *AP*, toutes les bases qui ont deux angles aigus, que je nomme *x*. Il est évident que les *x* sont croissantes en allant de *A* vers *P*, & les *y* décroissantes en allant de *M* vers *A*.

SCHOLIE II.

V. Parmi ces bases, celle qui a le plus grand angle obtus, & celle qui a le moindre angle aigu, ne diffèrent ni entre elles, ni avec les deux bases qui ont chacune un angle droit, que d'une grandeur infiniment petite, c'est pourquoi elles peuvent être prises l'une pour l'autre : ces deux bases représentent la puissance de l'Hyperbole.

THEOREME II.

VI. *Les appliquées & les coupées prises sur l'asymptote de l'Hyperbole, représentent non seulement les bases changeantes d'une suite infinie de Triangles qui ont deux côtés égaux chacun à chacun, mais elles représentent aussi les bases changeantes d'une infinité de suites de Triangles qui, considérés séparément, ont les côtés inégaux, & dont la difference des quarrés des côtés est le quarré d'une même ligne.*

† Soit les deux Triangles *ACB*, *FHG*, qui ont deux côtés égaux chacun à chacun, & deux angles *CBA*, *HGF*, qui, pris ensem-

* Fig. 4. † Fig. 1. & 3.

ſemble, ſont égaux à deux droits qui repréſentent deux Triangles d'une ſuite infinie. Soit deux autres Triangles KLM, NPO, qui repréſentent deux Triangles d'une autre ſuite infinie de Triangles qui ont deux côtés égaux chacun à chacun, plus grands ou plus petits que les deux côtés des deux premiers Triangles, enſorte néanmoins que la difference des quarrés des côtés des deux derniers Triangles ſoit égale à la difference des quarrés des côtés des deux premiers Triangles, & que les deux angles LMK, PON, pris enſemble, ſoient égaux à deux droits, je dis que $AB \times FG = KM \times NO$ ce qui eſt évident par le Lemme 1. Soit AB (a), FG (b), KM (x), NO (y). Subſtituant ces valeurs, il vient $ab = xy$. *C. Q. F. D.*

SCHOLIE.

VII. On pourroit déduire de ce Théoreme pluſieurs propoſitions ſur l'infini qui ſont connues, comme, par exemple, qu'il y a des infinis plus grands les uns que les autres : car le nombre des baſes de chaque ſuite infinie eſt d'autant plus grand que les côtés d'une ſuite de Triangles, qui ont deux côtés égaux chacun à chacun, ſont plus grands.

2°. On pourroit auſſi en déduire qu'il y a differens ordres d'infiniment grands : car, puiſque les baſes ſont infinies lorſque les côtés d'une ſuite de Triangles ne ſont que finis, les ſuites des baſes ſeront néceſſairement infiniment infinies, lorſque ces côtés ſeront infinis: or les côtés des Triangles inégaux devien-

viennent infinis; car parmi les suites infinies, il ne sauroit se rencontrer aucun Triangle isoscele.

COROLLAIRE I.

VIII. Dans l'Hyperbole chaque coupée prise sur l'asymptote est à son appliquée comme le sinus de la somme de deux angles est au sinus de la difference des mêmes angles sur la base de tout Triangle, dont la difference des quarrés des côtés est le quarré de la puissance de l'Hyperbole, & dont la base est égale à une coupée.

PREPARATION.

*Soient deux Triangles *ACB*, *FHG*, qui ont deux côtés égaux chacun à chacun, ensorte que l'angle *FHG* opposé à la base du second soit la difference des deux angles sur la base du premier Triangle *ACB*; des points *B* & *G* des deux lignes égales *BC* & *GH*, abaissez les perpendiculaires *BV* & *GT*, à cause de l'angle extérieur *BCV* égal aux deux intérieures *A* & *B*. *BV* est le sinus de la somme des angles sur la base du Triangle *ACB*, & *GT* est le sinus de l'angle *FHG*, qui est l'angle de leur difference: or (*par Lemme* 1.) lorsque l'angle *FHG* est la difference des angles *A* & *B*, l'angle *A* est égal à l'angle *F*; d'où il suit que les Triangles rectangles *ABV*, *FGT*, sont semblables; par con-

* Fig. 1.

conféquent $AB . FG :: BV . GT$, ou, par ce qui précede, la coupée de l'Hyperbole, prife fur les afymptotes, repréfentée par AB, eft à l'ordonnée qui peut être repréfentée par FG, ce que le finus BV eft au finus GT. *C. Q. F. D.*

PROBLEME I.

IX. *Un point d'une Hyperbole entre fes afymptotes étant donné, trouver autant de Triangles inégaux que l'on voudra, dont les bafes changeantes, prifes deux à deux, font les coupées & les appliquées de l'Hyperbole. 2°. Décrire l'Hyperbole au moyen des Triangles qui ont les côtés inégaux.*

*Soit le point donné N; par ce point tirez la ligne NF parallele à l'afymptote AQ. Prenez fur la ligne AT, perpendiculaire à l'afymptote AP, une ligne AB égale à la moitié de la difference de la coupée AF & de l'appliquée FN; par ce point B, à l'ouverture d'une ligne égale à la moitié de la fomme de AF & de FN, décrivez un arc de Cercle qui coupera AF en un point C; par le point C tirez à la ligne AT tant de lignes $C\sigma$ que vous voudrez, les Triangles inégaux ABC, ABC, font ceux que l'on cherche. Pour trouver differens points de l'Hyperbole au moyen de ces Triangles, par les points B à l'ouverture des côtés BA, décrivez des arcs de Cercles qui couperont leurs hypothénufes en r. Prenez fur l'afymptote AP une ligne AG égale à la fomme des côtés

AB

* Fig. 4.

AB & *BC* de l'un de ces Triangles rectangles *ABC*, & par le point *G* tirez une ligne *GH* parallele à l'asymptote *AQ* & égale à la difference *Cr* des côtés *AB* & *BC*; je dis que le point *H* est un point de l'Hyperbole. Il faut démontrer que la ligne *AC* est moyenne proportionnelle entre *AF* & *NF*.

DEMONSTRATION.

$$\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{AB}^2.$$

CONSTR. $\overline{BC}^2 = \dfrac{\overline{AF}^2 + 2AF \times FN + \overline{FN}^2}{4}$

Et $\overline{AB}^2 = \dfrac{\overline{AF}^2 - 2AF \times FN + \overline{FN}^2}{4}$.

Par conséquent $\overline{AC}^2 = \dfrac{4AF \times FN}{4} = AF \times FN$.

COROLLAIRE I.

X. D'où il suit que la raison pour laquelle l'Hyperbole approche de plus en plus de son asymptote sans y toucher, est la même que celle pour laquelle une infinité de Cercles, qui ont un point *A* commun, approchent de plus en plus de la ligne droite, ou, ce qui est la même chose, de leur tangente *AP*, sans qu'aucun de ces Cercles puissent toucher à leur tangente *AP* en plus d'un point *A*.

COROLLAIRE II.

XI. * D'où il suit encore, que la raison pour la

* Fig. 7.

laquelle on peut faire passer entre un Cercle & sa tangente une infinité d'autres Cercles sans se toucher entre eux, ni à leur tangente, qu'en un seul point, est la même que celle pour laquelle on peut faire passer entre une Hyperbole *GIK* & ses asymptotes *AQ* & *AP*, une infinité d'autres Hyperboles, comme par exemple, *LES*, sans qu'elles puissent se toucher entre elles ni à leurs asymptotes.

PROBLEME II.

XII. * *Les deux côtés d'un Triangle étant donnés, trouver le lieu de toutes les bases changeantes d'une suite de Triangles qui ont deux côtés égaux chacun à chacun, & décrire au moyen de ces bases l'Hyperbole par des points très proches.*

PREMIERE METHODE.

† Au milieu d'une ligne *BC* double du plus grand côté, élevez une perpendiculaire égale au plus petit côté *AI*, & par le point *A* à l'ouverture de la ligne *AI*, décrivez un quart de cercle qui rencontre la ligne *BC* en *K*; par le point *A* à l'ouverture du plus grand côté *AB* ou *AC*, décrivez deux arcs de cercle *BE*, *CD*, jusqu'à ce qu'ils rencontrent en *D* & en *E* la ligne *DE* parallele à *CB*. L'espace *CDIGK* contient toutes les bases qui ont deux angles aigus, & l'espace *IGKBE* contient toutes les bases qui ont un angle obtus.

DE-

* Fig. 4. 5. & 6. † Fig. 5.

DEMONSTRATION.

Les bases ne sauroient être en plus grand nombre que celui qui est exprimé par la hauteur du petit côté *AI*, c'est pourquoi si l'on conçoit une ligne *FGH* qui se meut parallelement à elle-même, en allant de *I* vers *A*, le nombre des lignes paralleles sera égal au nombre des bases de la suite des Triangles qui ont deux côtés égaux *AI*, *AB*, ou *AC*. Je dis de plus, que toutes ces lignes paralleles sont les bases que l'on cherche: car, par construction, les Triangles *FAG*, *GAH*, ont deux côtés égaux chacun à chacun, & aux lignes *AB* & *AI*, & deux angles *AGF* & *AGH*, qui pris ensemble sont égaux à deux droits. Par conséquent (*par Théor.* 1.) *FG* est une coupée de l'Hyperbole, & *GH* une ordonnée: c'est pourquoi si on prend sur l'asymptote *AP* une ligne *AF* égale à *FG*, & que par le point *F* on tire une ligne *FN* parallele à l'asymptote *AQ*, & égale à *GH*, le point *N* (*Théor.* 1.) sera un point de l'Hyperbole.

SCHOLIE.

XIII. On doit par cette méthode décrire l'Hyperbole par des points aussi proches que l'on veut. Car l'espace *CDIGK* contient toutes les bases qui ont deux angles aigus, & l'espace *IKBE* contient toutes celles qui ont un angle obtus; on n'a qu'à les choisir aussi proches l'une de l'autre que l'on voudra. *C. Q. F. D.*

DEUXIE-

DEUXIEME METHODE,

un peu différente de la premiere.

XIV. * A l'ouverture du petit côté *AK*, décrivez un demi-cercle partagé en deux également au point *I*; à l'ouverture du plus grand côté *AB*, par le point *A* décrivez un arc de cercle jusqu'à ce qu'il rencontre en *D* la ligne *ID* parallele à *BC*.

On prouvera, comme dans le premier cas, en faisant couler le long de *AI* une ligne *FG* parallelement à elle-même, que l'espace *CIDB* est le lieu de toutes les bases qui ont deux angles aigus, & l'espace *IKBD*, celui de toutes les bases qui ont un angle obtus.

SCHOLIE.

XV. Dans l'un & l'autre cas, quand même la ligne *FGH* ne seroit point parallele à la ligne *AB*, *FG* ne laisseroit pas d'être une coupée de l'Hyperbole, & *GH* l'ordonnée qui lui répond. Car, dans ce cas, comme dans les deux précédens, les Triangles *FAG*, *GAH*, ont deux côtés égaux chacun à chacun, & aux deux côtés *AI* & *AB*, & deux angles qui, pris ensemble, sont égaux à deux droits.

COROLLAIRE I.

XVI. Chaque suite infinie de Triangles qui ont deux côtés égaux chacun à chacun, répond

* Fig. 6.

pond à une portion déterminée de l'Hyperbole, qui est le lieu de toutes les bases changeantes de la suite.

COROLLAIRE II.

XVII. Le plus grand de deux côtés inégaux d'une suite infinie de Triangles, qui fait trouver toutes les coupées & toutes les ordonnées d'une portion déterminée de l'Hyperbole, est égal à la moitié de la somme; & le moindre côté à la moitié de la difference de la plus grande coupée, & de la moindre ordonnée de la portion déterminée de l'Hyperbole.

DEMONSTRATION.

Par le Problême 1er, les deux côtés de ce Triangle font trouver la plus grande coupée *AF*, & la moindre ordonnée *FN*.

La moindre coupée *AC*, & la plus grande ordonnée *CI* égale à *AC*, & par le Problême 2d, ils font trouver toutes les ordonnées qui sont moyennes entre *AC*, *AF*, *FN* & *CI*.

COROLLAIRE III.

XVIII. D'où il suit que pour trouver, au moyen de l'Hyperbole, le lieu des bases d'une suite infinie de Triangles qui ont deux côtés donnés, égaux chacun à chacun, il faut tirer deux lignes qui fassent au point *A* un angle quelconque, prendre sur la premiere une ligne *AF* égale à la somme, & sur la se-

con-

conde une ligne *AD* égale à la difference des côtés, & par les points *F* tirer les paralleles *FN*, *DN*, aux lignes *AQ*, *AF*, & décrire une Hyperbole qui passe par le point *A*.

L'espace compris entre la puissance de l'Hyperbole *IC*, & entre l'ordonnée *NF*, est le lieu des bases qui ont un angle obtus, & l'espace *MIND* est celui des bases qui ont deux angles aigus.

COROLLAIRE IV.

XIX. La difference de l'espace qui est le lieu des bases qui ont deux angles aigus d'avec celui qui est le lieu des bases qui ont un angle obtus, considerée dans le cercle, est un demi-cercle; considerée dans l'Hyperbole, elle est zero absolu.

La premiere partie de cette Proposition est évidente par la seule inspection de la Figure 6: car, si de l'espace *CIDB*, qui contient toutes les bases qui ont deux angles aigus, on ôte l'espace *IHKBD* qui contient toutes les bases qui ont un angle obtus, il reste le demi-cercle *CIHK*.

La seconde est aussi évidente: car si, dans l'Hyperbole, on ôte des deux espaces *MDNI*, *ICFN*, dont le premier contient toutes les bases qui ont deux angles aigus, & le second toutes les bases qui ont un angle obtus, l'espace mixtiligne *IZN*, il reste de part & d'autre, les deux espaces rectilignes égaux *MDZI*, *ZCFN*.

Co-

COROLLAIRE V.

XX. Les espaces qui sont le lieu d'une même suite de bases infinies sont inégaux, considerés dans le Cercle & dans l'Hyberbole ; car s'ils étoient égaux, on trouveroit la quadrature du cercle. Dans l'Hyperbole, la difference des deux rectangles rectilignes $MDZI$, $ZCFN$, seroit un espace rectiligne égal au demi-cercle $CIHK$.

PROBLEME III.

Construire un Compas à tracer une Hyperbole.

XXI. * Soit un compas $AKEG$ à trois branches, & à tête mobile, les deux branches AK & KE sont égales entre elles, & à une des lignes AB perpendiculaires à l'asymptote AP ; la branche KG est plus grande que chacune des deux autres, & égale à l'hypothénuse BC ; je dis que si la pointe A du Compas étant fixe en A, l'on fait couler le long d'une rainure les points E & G, ensorte que la pointe qui est en G chasse la branche GH parallele à AQ, pendant que la pointe qui est en E, chasse la branche EH parallele à la ligne AI, qui partage en deux également l'angle QAP des asymptotes, les deux lignes GH, EH ; se couperont en un point H, qui sera un point de l'Hyperbole ; par le point E tirez la ligne EV parallele à AQ & à GH.

DEMONST. (*constr.*) l'angle $QAP = VEP$, (*hyp.*) l'angle $HEG = \frac{1}{2} QAP$ (*constr.*) donc l'an-

* Fig. 4.

l'angle $VEH = EHG = HEG$; partant le Triangle EGH est isoscele, & le côté EG est égal au côté GH.

Soit KG (a), KE (b), $AC = c$, $AG = x$, $EG = y$; par le Théoreme 1, on aura $\overline{KG}^2 - \overline{KA}^2$ ($\overline{AC}^2$) $= AG \times EG = AG \times GH$, ou en termes algébriques $\overline{a^2 - b^2}$ (c^2) $= xy$. *C. Q. F. D.*

SCHOLIE.

XXII. La précédente Proposition peut servir à confirmer qu'il y a differens ordres d'angles infiniment petits; car lorsque les trois branches du Compas sont infinies, les lignes finies AG, EG, sont infiniment petites par rapport aux branches du Compas, par conséquent les angles AKG, AKE, EKG, sont infiniment petits; c'est pourquoi si l'on suppose que le Compas se soit mû jusqu'à ce que le point K ait infiniment approché de l'asymptote AP, il est évident que pendant ce mouvement les points E & G auront parcouru un espace infini, & que pendant cet espace infini, l'angle EKG aura toujours diminué, par conséquent il sera devenu infiniment plus petit qu'il n'étoit. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE.

XXIII. Dans l'Hyperbole le lieu des bases d'une suite infinie de Triangles qui ont deux côtés égaux chacun à chacun, contient le même nombre de bases égales chacune à chacune,

cune, qui répondent aux mêmes angles comme le lieu des baſes dans le Cercle.

* Je dis que l'eſpace *MDNI*, qui eſt le lieu des baſes qui ont deux angles aigus dans l'Hyperbole, contient le même nombre de baſes qui répondent aux mêmes angles que l'eſpace *VO*[illegible]*E*, qui eſt le lieu de toutes les baſes qui ont deux angles aigus dans les deux Cercles, dont l'un a pour rayon la moitié de la difference, & l'autre la moitié de la ſomme de la plus grande coupée *AF* & de la moindre ordonnée *FN*.

Pareillement l'eſpace *ICFN*, qui eſt le lieu de toutes les baſes qui ont un angle obtus dans l'Hyperbole, contient le même nombre de baſes qui répondent aux mêmes angles que l'eſpace *BRES*, qui eſt le lieu de toutes les baſes qui ont un angle obtus dans les mêmes Cercles.

Soit le Compas à trois branches *AKEG*, dont la plus grande branche *KG* eſt égale à la moitié de la ſomme, & les deux plus petites *AK* & *KE* à la moitié de la ſomme, & la difference de la plus grande coupée *AF* & de la moindre ordonnée *FN*.

Concevez qu'en même tems que la ligne *GH* décrit par un mouvement continu la portion déterminée de l'Hyperbole *ICFN*, la ligne *OKL* ſuit le point *K*, enſorte qu'elle ſe meut parallelement à l'aſymptote *AF*, & qu'elle entraine avec elle les lignes égales *AO*, *AK*, & la ligne *AL* égale à *KG*, à cauſe que ces trois lignes ont leur point fixe en

* Fig. 8.

en *A*. Lorſque le Compas à trois branches aura décrit la portion déterminée de l'Hyperbole, la ligne *OKL* aura tracé le demi-cercle *VBR* avec ſon anneau circulaire *BKRELS*; d'où il ſuit qu'à chaque ſécante *OL* répond dans l'Hyperbole une ligne *AG* ou *TH* dans l'eſpace *MDNI*, qui eſt le lieu de toutes les baſes qui ont deux angles aigus dans l'Hyperbole, & qu'à chaque *KL*, dans le Cercle, répond dans l'Hyperbole une ligne *EG* ou *GH* dans l'eſpace *ICFN*, qui eſt le lieu des baſes qui ont un angle obtus; par conſéquent le nombre des baſes dans le Cercle & dans l'Hyperbole eſt le même, ce qui ſemble un véritable Paradoxe.

2°. Je dis que les baſes, dans le Cercle & dans l'Hyperbole, ſont égales chacune à chacune, & qu'elles répondent à des angles égaux.

Il faut démontrer que la longueur de chaque *OL*, priſe dans le Cercle, eſt égale à la longueur de chaque *AG* ou *TH*, priſe dans l'Hyperbole, & que la longueur de chaque *KL* eſt égale à la longueur de chaque *EG* ou *GH*, de plus que les lignes ſont adjacentes aux mêmes angles; tirez la ligne *KQ* parallele à l'axe *AB*.

Les Triangles iſoſcele *OAK*, *AKE*, ont deux côtés égaux chacun à chacun; de plus à cauſe des paralleles *PA* & *KQ*, l'angle du milieu *OAK* eſt égal à l'angle du milieu *AKE*, par conſéquent $OK = AE$. D'où il ſuit que $KL = EG = GH$, ce qui eſt évident, à cauſe des perpendiculaires égales *AP*, *KQ*, & des obliques égales *AK*, *KE*, *AL*, *KG*.

C o-

COROLLAIRE I.

XXIV. La moitié de la difference AQ de chaque coupée AG, d'avec ſon appliquée GH ou EG, eſt égale à l'ordonnée PK d'un Cercle, dont le rayon AK eſt égal à la moitié de la difference de la plus grande coupée AF & de la moindre ordonnée FN; de plus, le nombre des differences dans la portion déterminée de l'Hyperbole eſt égal au nombre des ordonnées dans le Cercle.

COROLLAIRE II.

XXV. La moitié de la ſomme de chaque coupée AG, & de chaque appliquée GH eſt égale à l'ordonnée PL d'un Cercle qui a pour rayon une ligne AL égale à la moitié de la ſomme de la plus grande coupée AF & de la moindre appliquée FN; de plus, le nombre de ces lignes, dans la portion déterminée de l'Hyperbole, eſt égal à celui des ordonnées compriſes entre la tangente BS & le rayon AE.

DEMONSTRATION. $PK = \frac{AG - GH}{2} = \frac{AG - EG}{2}$; ajoutez de part & d'autre les grandeurs EG & KL, on aura $PL = \frac{AG - EG}{2} + EG$, ou $PL = \frac{AG + EG}{2} = \frac{AG + GH}{2}$. *C. Q. F. D.*

Co-

COROLLAIRE III.

XXVI. Lorſque le Compas n'a que deux branches égales AK & KE, & que la branche KE pouſſe par ſon extrémité E la grandeur conſtante EG, & la ligne GH qui fait un angle quelconque ſur la ligne AP, la ligne KG devient une grandeur changeante; je dis que ſi pendant le mouvement du Compas on prend ſur GH les differentes valeurs de GK, la ligne qui paſſera par ces points ſera une Parabole.

Soit $AK = KE = a$, $EG = b$, $AG = x$, $KG = y$, on aura (*Théor.* 2) $\overline{KG}^2 = \overline{AK}^2 + AG \times EG$, ou, en termes algébriques, $y^2 = a^2 + bx$, qui eſt une Equation à la Parabole.

COROLLAIRE IV.

XXVII. Lorſque le point fixe eſt en G, & le point mobile en A, & que la branche KG eſt égale à la branche AK, alors EK devient une grandeur changeante. Si l'on ſuppoſe que la branche AK pouſſe la branche AQ, & que pendant le mouvement du Compas on prenne ſur AQ les differentes valeurs de EK, la courbe qui paſſera par ces points ſera encore une Parabole.

Soit $AK = KG = a$, $EG = b$, $AE = x$, $KE = y$, à cauſe du Triangle iſoſcele, AKG, $\overline{AK}^2 - AE \times EG = \overline{EK}^2$, ou, en termes algébriques, $a^2 - bx = y^2$.

Co-

COROLLAIRE V.

XXVIII. * Lorſque le Compas n'a que deux branches inégales AK, KE, & que le point D qui décrit la Courbe, tombe ſur une des branches inégales KE, alors le Compas décrit une Courbe du troiſieme genre, qui eſt une double éllipſe; par les points K & D, tirez les perpendiculaires KG, DC, & par le point D la ligne DH parallele à la ligne AC.

Soit $AK (a)$, $KE (b)$, $ED (d)$, $AF (x)$ $FD (y)$.

Soit $d . c :: FD (y) . DC \left(\frac{cy}{d}\right)$, & $d . \sqrt{d^2 - c^2} :: FD (y) . FC = \frac{y\sqrt{d^2 - c^2}}{d}$, à cauſe du Triangle rectangle DCE, $CE = \sqrt{d^2 - \frac{c^2 y^2}{d^2}} = \frac{1}{d}\sqrt{d^4 - c^2 y^2}$, à cauſe des Triangles ſemblables DEC, EKG.

$DE (d) . CE \left(\frac{1}{d}\sqrt{d^4 - c^2 y^2}\right) :: KD (b-d) . HD$, ou $GC = \frac{b-d}{d^2} \times \sqrt{d^4 - c^2 y^2}$,

& $DE (d) . DC \left(\frac{cy}{d}\right) :: KE (b) . KG = \frac{bcy}{d^2}$.

Partant $GF = \frac{b-d}{d^2}\sqrt{d^4 - c^2 y^2} - \frac{y\sqrt{d^2 - c^2}}{d}$,

ou $GF = \frac{b - d\sqrt{d^4 - c^2 y^2} - dy\sqrt{d^2 - c^2}}{d^2}$

Mem. 730.

* Fig. 9.

Or $AG = \sqrt{\overline{AK}^2 - \overline{KG}^2} = \sqrt{a^2 - \frac{b^2 c^2 y^2}{d^4}}$ $= \frac{1}{d^2} \sqrt{d^4 a^2 - b^2 c^2 y^2}$: d'où l'on tire une seconde valeur de $GF = x - \frac{1}{d^2} \sqrt{d^4 a^2 - b^2 c^2 y^2}$ $= \frac{d^2 x^1 - \sqrt{d^4 a^2 - b^2 c^2 y^2}}{d^2}$.

Donc $\overline{b-d} \sqrt{d^4 - c^2 y^2} - dy \sqrt{a^2 - c^2} = d^2 x^1 - \sqrt{d^4 a^2 - b^2 c^2 y^2}$; pour abréger, lorsque $d = c$, l'Equation devient

$$\overline{b-d} \times d\sqrt{d^2 - y^2} = d^2 x - d\sqrt{a^2 a^2 - b^2 y^2},$$

ou $\overline{b-d} \sqrt{d^2 - y^2} = dx - \sqrt{d^2 a^2 - b^2 y^2}$.

Faisant évanouir les incommensurables, l'Equation devient

$$\left.\begin{array}{lll} \overline{2b-d}^2 y^4 & + 4b^2 x^2 y^2 & + d^2 x^4 \\ & - 2d \times \overline{b-d}\, x^2 y^2 & - 2d^2 a^2 x^2 \\ & - 2da^2 \times \overline{2b-d}\, y^2 & - 2d^2 \overline{b-d}^2 x^2 \\ & + 2d \times \overline{b-d}^2 \times \overline{2b-d}\, y^2 & + d^2 a^4 \\ & & - 2d^2 a^2 \overline{b-d}^2 \\ & & + d^2 \overline{b-d}^4 \end{array}\right\} = 0.$$

Lorsque $y = 0$,

$$\left.\begin{array}{ll} x^4 - 2\overline{b-d}^2 x^2 & + a^4 \\ - 2a^2 & - 2a^2 \times \overline{b-d}^2 \\ & + \overline{b-d}^4 \end{array}\right\} = 0. \text{ Partant}$$

x

$$x^2 = a^2 + \overline{b-d}^2 \pm \sqrt{4a^2\,\overline{b-d}^2}$$

$$\text{ou } x^2 = a^2 \pm 2a \times \overline{b-d} + \overline{b-d}^2.$$

$$x = a \pm \overline{b-d} \quad -x = -a \mp \overline{b-d}.$$

Lorsque $x = 0$,

$$\left.\begin{array}{l} \overline{2b-d}^2 y^4 - 2da^2 \times \overline{2b-d} y^2 + d^2 a^4 \\ + 2d \times \overline{b-d}^2 \times \overline{2b-d} y^2 - 2d^2 a^2 \overline{b-d}^2 \\ + d^2 \overline{b-d}^4 \end{array}\right\} = 0.$$

qui est un quarré parfait, partant

$$y^2 = \frac{da^2 - d\overline{b-d}^2}{2b-d},\ y = \pm\sqrt{\frac{da^2 - d\overline{b-d}^2}{2b-d}}.$$

Lorsque $\overline{b-d}$ est égal à a, la valeur de y est zero absolu au point où x est zero. Par conséquent les deux doubles ellipses opposées se touchent à l'origine.

Lorsque a est plus grand que $b-d$, il y a deux valeurs de y à l'origine. Par conséquent dans ce cas, les deux doubles ellipses se coupent en croix.

Lorsque $b-d$ est plus grand que a, la valeur de y à l'origine des x est imaginaire. Par conséquent dans ce cas, les deux doubles ellipses ne se touchent, ni ne se coupent point, mais elles sont séparées l'une de l'autre d'un intervalle qui est plus ou moins grand, selon la quantité dont $b-d$ surpasse a.

Lorsque a est égal à b, les deux doubles ellipses opposées se confondent & se chan-

 gent

gent en une ſimple, dont l'Equation eſt.

$$\frac{d^2 x^2}{\overline{2a-d}^2} = d^2 - y^2.$$

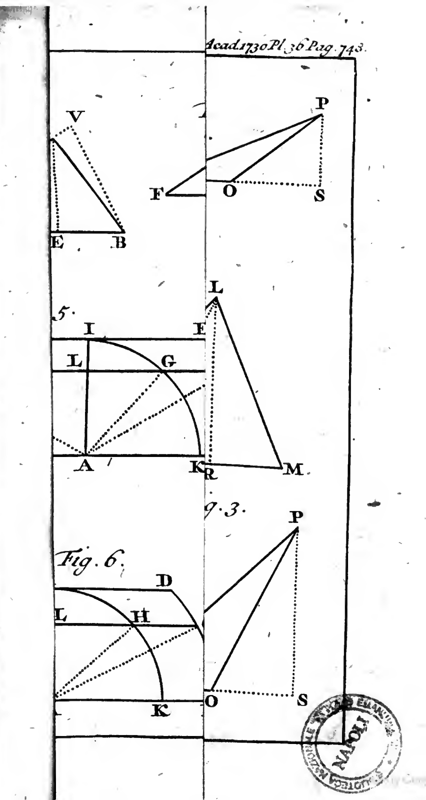
On donnera la ſuite dans un autre Mémoire, où on rendra raiſon de ce qui ſemble dans celui-ci un Paradoxe.

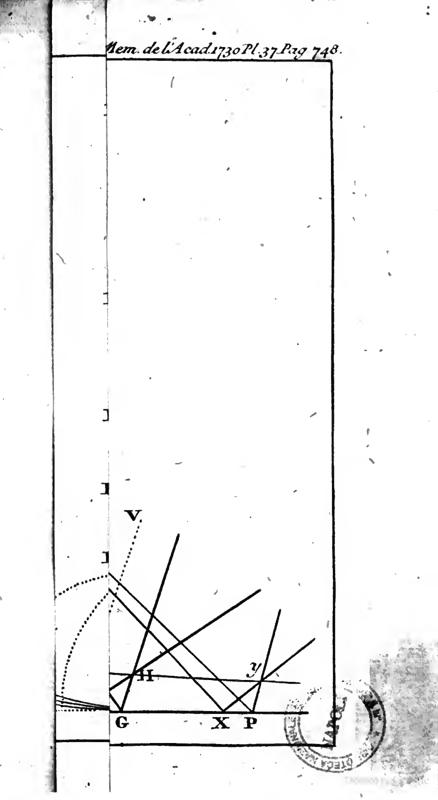
MEMOIRE SUR UN GRAND NOMBRE DE PHOSPHORES NOUVEAUX.

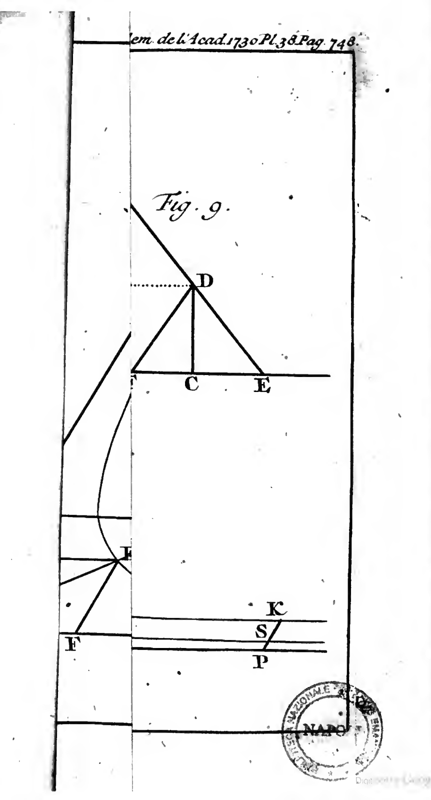
Par M. DU FAY *.

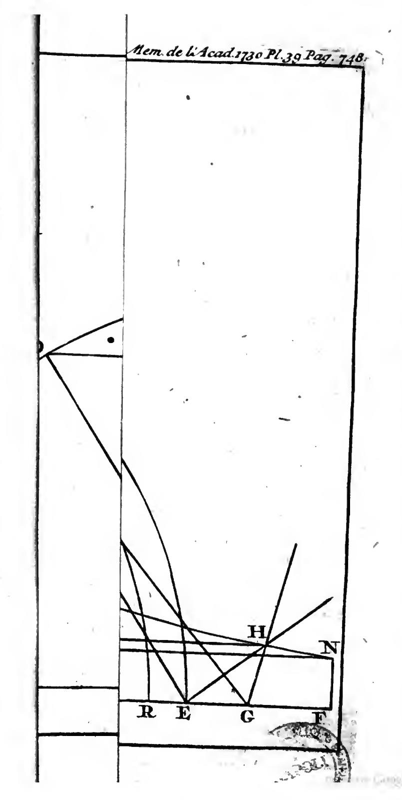
LA découverte de la plus grande partie des Phoſphores que nous connoiſſons, eſt dûe au hazard; peu touchés de l'utilité qui pouvoit en réſulter, & encore moins inſtruits des routes qu'il falloit tenir, les Chymiſtes ont de tout tems aſſez négligé la recherche des Phoſphores. Je n'entrerai point dans le détail de tous ceux qui ſont connus, & dont la plupart n'ont aucun rapport avec ceux dont j'entreprends de parler, & je ne m'arrêterai qu'à celui qui a fait tant de bruit, ſous le nom de *Pierre de Boulogne.* Tout le monde ſait qu'un Artiſan, moins occupé de ſon

* 15 Nov. 1730.


Acad.1730 Pl.36 Pag.743.
V
P
F
O
S
E
B
L
5.
I
E
L
G
A
K
R
M
9.3.
P
Fig. 6.
D
L
H
K
O
S
NAPOLI


V
H
y
G
X
P


Mem. de l'Acad. 1730 Pl. 38 Pag. 748.
Fig. 9.
D
C
E
K
S
P
F



Mem. de l'Acad. 1730 Pl. 39 Pag. 748.
H
N
R
E
G
F

ſon métier que du deſir de faire en Chymie quelque découverte utile, s'aviſa de calciner cette Pierre, eſperant que ce pourroit être une Mine d'Argent, & trouva qu'elle avoit cette proprieté ſinguliere, & alors crue unique, d'être lumineuſe dans l'obſcurité, après avoir été expoſée pendant quelques momens au jour dans l'Air libre. Cette découverte fut extrêmement célébrée, pluſieurs perſonnes écrivirent ſur ce ſujet, & entrerent dans un grand détail ſur la nature de cette Pierre, les lieux où elle ſe trouve, ſes differentes préparations, ſes proprietés, &c. Poterius, Licetus, Celius, Mentzelius, & pluſieurs autres en firent une Hiſtoire fort ample, & juſqu'alors on n'avoit entendu parler d'aucune autre matiere qui eût la même proprieté. Enfin Balduinus, Chymiſte Allemand, donna dans les Ephémerides d'Allemagne, un Traité intitulé * *Aurum auræ*, à la fin duquel il y a une Section qui a pour titre, *Phoſphorus hermeticus*, dans laquelle il décrit la préparation & les effets d'un Phoſphore qui paroit avoir infiniment de rapport avec la Pierre de Boulogne: mais tout cet Ouvrage eſt écrit ſi énigmatiquement, & en des termes ſi obſcurs, que j'avoue qu'il m'a été impoſſible d'y rien entendre. Mentzelius, dont l'Ouvrage eſt poſtérieur à celui de Balduinus, compare d'une maniere fort détaillée, la Pierre de Boulogne avec ce nouveau Phoſphore, mais ſans l'avoir vu, & ſimplement ſur les effets qui ſont rapportés dans le Traité de Balduinus.

 Kun-

* *In App. ad annum* 4 & 5, *natur. curioſ. p.* 171.

Kunkel, Boyle, M. Lémery, Theichmeyer en dernier lieu, ont donné ſous le nom de *Phoſphore hermetique de Balduinus*, un procedé qui réuſſit parfaitement, & qu'on peut croire en effet être le même que celui de Balduinus, puiſqu'il en a réellement toutes les proprietés, quoiqu'à dire le vrai, on ne trouve rien dans la compoſition de ce dernier qui ait aucun rapport avec le premier, celui-ci étant une diſſolution de Craye par l'Eau forte évaporée & calcinée; au-lieu que celui de Balduinus eſt la Tête-morte d'un Alkaeſt, dont la préparation eſt décrite en termes ſi pompeux & ſi obſcurs, qu'on n'en peut faire aucun uſage. Quoi qu'il en ſoit, celui qu'on trouve dans ces Auteurs a beaucoup de conformité pour ſes effets avec la Pierre de Boulogne, & c'eſt, à ce que je crois, la ſeule préparation connue qui ait cette proprieté; on n'a même trouvé juſqu'à préſent dans les Mineraux, ni dans les autres matieres ſimples, que la ſeule Pierre de Boulogne qui ait cette vertu ſinguliere de s'abbreuver, pour ainſi dire, des rayons de lumiere, & de les conſerver aſſez longtems, pour paroître lumineuſe dans l'obſcurité pendant quelques minutes.

* Le P. Kirker dit en avoir trouvé de pareilles, & qui avoient les mêmes propriétés, auprès d'une Mine d'Alun à Tolfa. Mentzelius † décrit cinq eſpeces de cette Pierre, qui ſe trouvent toutes aux environs de Boulogne,

* *De Arte magn. p. 581.*
† *Sect. 2. cap. 5.*

logne, & dont quelques-unes ont des differences considerables. Il semble que cela devoit naturellement faire soupçonner qu'il se pouvoit rencontrer ailleurs des Pierres semblables, ou d'autres qui eussent les mêmes avantages; il faut cependant que personne ne s'en soit avisé, & il semble qu'on se soit refusé aux découvertes qui s'offroient d'elles-mêmes dans une infinité d'opérations. Plus les expériences sont simples, plus elles tardent souvent à être découvertes; on va être étonné sans doute de ce qu'une chose aussi commune, & qui demande aussi peu d'appareil, a pu demeurer si longtems sans être connue.

Il y a quelques années que je formai le dessein d'examiner, par les differens moyens que je pus imaginer, la nature de toutes les Pierres fines. Parmi les épreuves que j'en faisois, celle de les calciner étoit une des principales. Comme je tâchois de n'obmettre aucune des Pierres qui peuvent être rangées dans la classe des Pierres fines, j'examinai aussi celles qui n'y sont que parce qu'il n'étoit pas trop aisé de les placer ailleurs; la Topaze commune est de ce nombre: comme il y en a de plusieurs sortes, il est bon d'avertir que celle dont je parle, n'est quasi connue qu'en Médecine, on l'employe dans les préparations où il doit entrer des Topazes; c'est une Pierre très tendre, jaunâtre, pesante, talqueuse, & qui, lorsque j'en voulus faire la description, me rappella sur le champ l'idée de la Pierre de Boulogne, dont elle ne differe que par la forme extérieure, celle-ci étant ordinairement un peu arrondie & raboteuse,

au-lieu que la Topaze affecte le plus souvent la forme cubique, ou du moins est presque toujours terminée par des surfaces paralleles. Sans en faire de comparaison plus détaillée, je calcinai cette Topaze dans un creuset, comme les autres Pierres, & lorsqu'elle fut refroidie, je trouvai qu'elle avoit une forte odeur de Soufre semblable à celle de la Pierre de Boulogne calcinée. Je ne doutai plus qu'elle ne fût lumineuse; je l'exposai à la lumiere du jour, & la portai ensuite dans l'obscurité, & je la trouvai semblable aux meilleures Pierres de Boulogne. Je comparai ensuite avec plus de soin cette Pierre, avec un assez grand nombre de celles que j'avois rapportées de Boulogne, il y a quelques années, & je trouvai que c'etoit en effet la même nature de Pierre, ensorte qu'il y en avoit quelques-unes d'entierement semblables; ma surprise changea d'objet, & je ne fus plus étonné que de ne m'en être pas avisé plutôt.

J'avois soupçonné autrefois que la Bélemnite, ou Pierre de Lynx, pouvoit avoir quelque rapport avec la Pierre de Boulogne, à cause de sa disposition en rayons: je l'essayai sur le champ, elle se réduisit presque en poudre par la calcination, & n'avoit, étant refroidie, aucune odeur de Soufre. Cela me parut d'un mauvais augure: mais ma conjecture se trouva très fausse, car la Bélemnite me donna une belle lumiere, & même un peu plus vive que la Topaze. Je ne songeai plus alors qu'à pousser plus loin ma découverte, & à essayer toutes les Pierres qui me vinrent dans l'idée.

Je

Je ferois un volume entier, si je voulois rapporter toutes les expériences que je fis, & les differentes manieres dont elles me réussirent; mais, pour éviter un détail ennuyeux, je dirai simplement que j'essayai toutes les especes de Gyps, ou Pierres à plâtre, que je pus recouvrer, & toujours avec succès; toutes me donnerent de la lumiere, presque toutes avoient une odeur sulphureuse, mais quelques-unes étoient plus lumineuses que les autres; les Albâtres, & le Gyps de Montmartre, appellé improprement *Talc*, étoient de ce nombre.

Ayant épuisé les Gyps, je passai aux Pierres à chaux, & aux Marbres, qui sont pour la plupart de même nature; tout se trouva Phosphore, tout me donna de la lumiere: il est vrai qu'elle étoit moins vive dans ces dernieres Pierres que dans les Gyps, & qu'il falloit un degré de feu beaucoup plus violent pour les calciner; souvent après la premiere, & même la seconde calcination, ces Pierres ne donnoient aucune lumiere, mais en les calcinant de nouveau, elles devenoient lumineuses, ensorte qu'il n'y en a aucune, de celles qui se peuvent réduire en Chaux, qui ne m'ait donné de la lumiere, lorsque je me suis obstiné à la calciner.

Les matieres terreuses, telles que la Marne, les Bols, la Craye, les Moilons, les Pierres de Taille & de Liais, n'ont point donné de lumiere par la calcination, quelque violente qu'elle ait été. Je résolus donc de tenter une autre voye, & la facilité qu'elles ont presque toutes à se dissoudre dans les

Esprits acides, me fit juger que j'en devois attendre le même effet que de la Craye dans le Phosphore de Balduinus; j'en essayai plusieurs qui me réüssirent très bien, & il est vraisemblable que toutes celles qui se peuvent dissoudre dans l'Eau forte, deviendront lumineuses en suivant le même procedé.

Les Pierres à chaux, les Marbres, les Gyps, les Albâtres, la Bélemnite, les Coquilles pétrifiées tendres, & généralement toutes les Pierres qui se peuvent dissoudre par les acides, quoique lumineuses par la seule calcination, le sont aussi par le procedé de Balduinus. Enfin, à la réserve des Pierres dures ou impénétrables aux acides, comme les Agathes, les Jaspes, le Caillou, le Porphyre, le Grais, le Sablon, le Crystal de Roche, le Crystal d'Islande, le Sable de Riviere, la Pierre de Lar, la Pierre de la Croix, l'Ardoise, le Talc, les Pierres précieuses dont aucune ne m'a réüssi, il n'y en a peut-être point qui ne soit lumineuse, soit par la simple calcination, soit par la préparation que nous avons rapportée, ou même des deux manieres.

Je ne crois pas cependant les Pierres dures, dont je viens de parler, absolument intraitables, & j'espere parvenir à les rendre lumineuses comme les autres, par un procedé que je n'ai point encore eu le tems de finir. Peut-être les Métaux mêmes ne sont-ils pas exempts d'une proprieté commune à tout ce qui est renfermé dans les entrailles de la Terre: mais je réserve ce travail pour un autre tems.

Le

Le Phosphore de Balduinus ne doit être regardé que comme faisant partie de la classe générale des matieres qui deviennent lumineuses par la dissolution. Voici la maniere de les préparer toutes, qui m'a paru la plus simple. On fait dissoudre dans l'Eau forte, ou l'Esprit de Nitre, quelqu'une des Terres, Pierres, ou Crayes, dont nous venons de parler, & pour cela, on les pulvérise, & on les jette petit à petit dans l'Eau forte, afin que l'ébullition ne soit point trop violente, ce que l'on continue jusqu'à ce qu'il ne se fasse plus de fermentation. On verse la dissolution par inclination, & on la fait évaporer jusqu'à siccité dans un vaisseau de terre, ou de grès; on prend un peu de cette matiere seche, on la met dans un Creuset, dont elle ne remplisse que la moitié, & sans le couvrir, on le place entre les charbons ardens; la matiere se fond, & après avoir bouillonné pendant quelque tems, elle se desseche, sans qu'il soit besoin de faire un plus grand feu que celui qu'il faut pour fondre du plomb; on laisse refroidir le Creuset, & l'ayant exposé à la lumiere, on le porte dans l'obscurité: il est inutile de dire ici que pour bien voir l'effet de tous ces Phosphores, il faut avoir tenu pendant quelque tems les yeux fermés; tout le monde en sait les raisons, & il les faut observer exactement dans ces expériences, pour les voir dans toute leur beauté.

Entre les Pierres qui deviennent lumineuses par la dissolution, la Pierre de Taille m'a paru faire le plus bel effet; & la Bélemnite, qui par la simple calcination est une des plus

lumineuſes, m'a ſemblé la moins brillante par la diſſolution ; je n'entrerai point dans l'examen des autres, parce que ce détail n'auroit point de bornes. Il ne ſeroit pas non plus poſſible d'examiner en particulier toutes celles qui deviennent lumineuſes par la ſeule calcination, il ſuffit de s'arrêter à celles qui font le plus bel effet, telles que ſont la Bélemnite, la Topaze, la Pierre de Boulogne & le Gyps talqueux. Voici la maniere de les préparer toutes, qui eſt très ſimple, & qui m'a parfaitement réuſſi.

Je prends une, ou pluſieurs de ces Pierres entieres, ou pulvériſées, je les mets dans un Creuſet que je couvre & que je place dans une Forge, je l'entoure de charbons, & je le chauffe à peu près comme ſi je voulois fondre de l'Argent; je le laiſſe en cet état environ une demi-heure, ou trois quarts d'heure, & ayant laiſſé refroidir le Creuſet, ma Pierre ſe trouve lumineuſe. La Pierre de Boulogne ne demande pas plus de préparation que les autres, & quoique le procedé de Cellius *, rapporté par M. Homberg, ſoit parfaitement bon, celui-ci réuſſit également bien, & demande moins d'appareil. Si la Pierre n'eſt point lumineuſe, ou qu'elle ne le ſoit que foiblement, on la calcine une ſeconde, ou même une troiſieme fois, & elle le devient.

Pour en voir l'effet, je les expoſe ordinairement pendant une minute au grand jour, &

* *Il Fosforo, ò vero la Pietra Bologneſe preparata per far rilucere fra l'ombre.*

& elles s'impregnent d'une lumiere, dont la vivacité & la durée font inégales; celle de la Topaze eſt fort vive & dure peu, mais j'ai ſouvent vu la Bélemnite la conſerver plus d'une heure. Toutes ces Pierres, de même que celle de Boulogne, deviennent lumineuſes étant expoſées au jour à travers l'eau, le verre, & tous les corps tranſparens; elles le deviennent auſſi, mais très foiblement, au clair de Lune, à la lumiere d'un flambeau, ou d'une bougie, & même pendant le crépuſcule, enſorte qu'en Eté j'en ai vu prendre de la lumiere une heure entiere après le coucher du Soleil. Pluſieurs Auteurs ne conviennent pas de quelques-unes de ces expériences à l'égard de la Pierre de Boulogne, mais cela vient ſans doute de ce qu'ils ſe font ſervi de Pierres qui avoient peu de vertu, car le fait eſt certain, & je l'ai éprouvé plus d'une fois. En général, la lumiere eſt par-tout la même, elle ne diffère que par le plus ou le moins de vivacité; ainſi, quelque cauſe qui la produiſe, on en doit toujours attendre le même effet. M. Lémery a remarqué que la Pierre de Boulogne ne prenoit pas tant de lumiere étant expoſée au Soleil que dans l'ombre, ſoit que la matiere de la lumiere, pouſſée avec trop d'impétuoſité, ſoit réfléchie en plus grande quantité par la Pierre, ſoit que le Soleil enleve promptement les parties les plus propres à conſerver le mouvement; quoi qu'il en ſoit, j'ai fait la même obſervation ſur la plupart des matieres dont j'ai parlé dans ce Mémoire. Il eſt auſſi à remarquer que l'effet de ces Pierres eſt moins beau, &

que quelques-unes n'en font aucun, lorsqu'elles viennent d'être calcinées, & qu'elles sont encore chaudes, qu'étant refroidies : il m'a aussi paru qu'elles faisoient encore mieux le lendemain que le jour même de leur calcination.

Je dois ajouter ici, que n'ayant pas toujours calciné chacune de ces Pierres séparément, mais en ayant mis quelquefois plusieurs ensemble, j'ai remarqué que rien ne faisoit mieux que la Topaze calcinée dans le même creuset avec de la Bélemnite concassée ou pulvérisée ; & qu'en général celles qui demeurent entieres dans la calcination, font mieux, lorsqu'on les entoure de poudre de la même pierre, ou de quelque autre ; M. Homberg l'avoit remarqué à l'égard de la Pierre de Boulogne, mais sans cela la Pierre ne laisse pas d'être lumineuse, & cette circonstance ne sert qu'à rendre sa lumiere plus vive.

J'ai tâché, par tous les moyens que j'ai crû pratiquables, de fixer le dégré de feu le plus convenable pour ces sortes de calcinations, mais je n'ai pû y parvenir, & quand je l'aurois fait, on n'en auroit tiré aucune utilité, parce qu'il est presque impossible de ne pas réussir dans toutes ces operations ; j'ai poussé le feu sur la Topaze, la Bélemnite & la Pierre de Boulogne jusqu'à vitrifier tout l'intérieur du creuset, elles ont toujours été lumineuses, elles m'ont cependant paru l'être un peu moins que lorsqu'elles étoient calcinées plus moderément. Il résulte de-là, qu'on ne peut manquer qu'en ne donnant pas le feu

feu aſſez fort, auquel cas il faut recommencer, & on eſt aſſuré de réuſſir. En général, les Gyps & Albâtres demandent le moins de feu; les Marbres & les Pierres à Chaux en demandent le plus; & il faut le degré moyen à la Bélemnite, la Topaze & la Pierre de Boulogne.

Je vais rapporter maintenant quelques obſervations ſur pluſieurs de ces Phoſphores, qui méritent d'être remarquées. Nous avons déja obſervé que toutes ces matieres ne rendent pas une lumiere égale: il ſe trouve encore beaucoup d'autres varietés dans leurs effets. Celles qui deviennent lumineuſes par diſſolution, donnent une lumiere rougeâtre, & ſemblable à un charbon de feu, mais cette proprieté ne leur dure gueres plus d'un mois; la lumiere des Pierres à Chaux & des Marbres eſt blanche, & aſſez vive dans les commencemens, mais leur vertu n'eſt pas non plus de longue durée, & je n'en ai point vu qui l'eût conſervée deux mois après ſa calcination. Les Albâtres & les Gyps ſont, à peu près, dans le même cas, excepté celui de Montmartre que j'ai conſervé lumineux pendant plus de ſix mois, mais ſa vivacité alloit toujours en diminuant. Je ne puis encore aſſigner aucun terme à la durée de la proprieté des autres Pierres, n'ayant pas même remarqué de diminution ſenſible dans la plupart, quoique j'en aye de calcinées depuis huit mois, & qu'elles ayent été expoſées toutes très-ſouvent à la lumiere, ce qui paroît leur devoir faire le plus de tort.

J'ai voulu voir l'effet que feroient ces diffe-

ferens Phoſphores dans l'eau, & il n'y en a aucun de ceux que j'ai eſſayés qui y ait entierement perdu ſa lumiere. Les Marbres & les Pierres à Chaux étant nouvellement calcinés, y font un effet ſingulier. Lorſqu'on leur a fait prendre de la lumiere, en les expoſant à l'air, ſi on les porte dans l'obſcurité, & qu'on les plonge ſubitement dans l'eau, leur lumiere augmente tout à coup, à meſure qu'elles ſe diſſolvent & s'échauffent, & un moment après elle s'évanouït preſque entierement; l'eſpece de pâte liquide, en laquelle ſe réduiſent alors ces Pierres, demeure cependant encore un peu lumineuſe, & même reprend de la lumiere, quoique noyée d'eau, ſi on l'expoſe de nouveau au jour; il eſt vrai que cette proprieté lui dure très peu, & qu'au bout de 24 heures, elle n'en avoit plus aucune. Les mêmes Pierres éteintes à l'air pendant huit jours, prennent encore de la lumiere, & ne font plus le même effet étant plongées dans l'eau; elles y conſervent leur lumiere ſans cette augmentation ſubite; mais ſans diminution ſenſible, & cependant elles perdent leur vertu en peu de tems. Les Gyps & Albâtres plongés dans l'eau font le même effet que la Chaux éteinte à l'air: toutes les autres Pierres n'y ſouffrent aucun changement, l'eau ſe charge ſeulement de la poudre la plus ſubtile, & paroît d'une lumiere blanchâtre ou laiteuſe, les particules plus groſſes demeurent au fond de la liqueur, & ſont plus lumineuſes que le reſte. L'Eſprit de Vin & l'Huile ne font pas plus d'effet que l'eau; & j'ai conſervé pendant pluſieurs jours des

des morceaux de ces Phoſphores dans chacune de ces liqueurs, ils ont fait leur effet à l'ordinaire, mais ils ont perdu leur proprieté plutôt qu'ils n'auroient fait étant conſervés ſechement.

L'Eau forte & les autres Eſprits acides n'éteignent pas la lumiere de la Topaze, ni de la Pierre de Boulogne; l'ayant même perdue au bout de quelques minutes, comme elles auroient fait dans l'expérience ordinaire, elles la reprennent à travers la liqueur dans laquelle elles ne ſe diſſolvent point, quelque tems qu'elles y demeurent, & j'en ai conſervé pendant très longtems ſans qu'il leur ſoit arrivé plus de changement que dans l'eau commune. M. le Comte de Marſilly dit que la Pierre de Boulogne fermente dans l'Eau forte: je l'ai examiné avec ſoin, & il m'a paru que lorſqu'elle étoit bien nette, & dégagée de toute matiere terreuſe, elle ne fermentoit, ni ne ſe diſſolvoit point dans les Acides. Le Phoſphore de Balduinus, & tous ceux qui ſe font par diſſolution, ne s'éteignent pas non plus dans les Acides, mais ils s'y diſſolvent de nouveau, lentement, & ſans ébullition, & ils ne ceſſent de faire leur effet que lorſqu'ils ſont entierement diſſouts. La Bélemnite s'éteint dans l'Eau forte, & fait lorſqu'on l'y jette, un bruit ſemblable à un fer rouge qu'on plonge dans l'eau; ſa lumiere augmente dans l'inſtant, & ſe perd un moment après. Le Gyps fait à peu près le même effet, horſmis qu'il ne fait pas ce bruit dont je viens de parler, mais il s'y diſſout avec ébullition, & perd ſa lumiere; il faut

faut entendre la même chose des Albâtres & des Sélénites : toutes ces Pierres exhalent une forte odeur de Soufre, en les plongeant dans l'Eau forte, ce que ne font point celles qui n'y perdent pas leur lumiere sur le champ.

Aucune de ces matieres ne m'a paru faire d'effet sensible dans les dissolutions de Sels alkalis ; elles n'y font que comme dans l'eau commune, c'est-à-dire, qu'elles y conservent leur lumiere.

Il y a encore un grand nombre d'expériences à faire sur ce sujet, & elles peuvent être variées à l'infini, par le nombre prodigieux de ces sortes de Phosphores, car le champ est encore infiniment plus vaste qu'il ne l'a paru par ce Mémoire, dans lequel nous n'avons parlé que des seuls Mineraux, & il ne faut pas croire que le Regne des Végétaux & celui des Animaux ne nous fournisse pas un aussi grand nombre de pareils Phosphores. Dans une matiere aussi étendue, il ne m'a été possible d'en essayer qu'un petit nombre, mais tous ceux que j'ai essayés m'ont réussi. L'Yvoire, les Os d'Animaux, les Ecailles d'Huîtres, les Coquilles d'Oeufs & les autres matieres semblables, étant brûlées simplement dans le feu, ou dans un Creuset, deviennent lumineuses, & quelques-unes conservent leur lumiere assez longtems. Les Bois, les Fruits, les Herbes, & tout ce qui peut être réduit en cendres, donne aussi de la lumiere, il ne faut que dissoudre ces cendres dans l'Eau forte, & proceder comme dans la préparation de Balduinus ; l'effet en est

eſt le même. Enfin il eſt à croire qu'il ne ſe trouvera plus rien ſur la Terre qui ne mérite le nom de Phoſphore à auſſi juſte titre que la Pierre de Boulogne. Dans quel étonnement ne ſeroient point ceux qui ont fait des volumes entiers pour faire l'éloge des proprietés merveilleuſes de cette Pierre, s'ils voyoient aujourd'hui qu'il eſt preſque impoſſible de trouver quelque matiere dans le monde qui n'ait pas les mêmes avantages ! Et ce ſera un phénomene très ſingulier, qu'une matiere qu'on ne pourra rendre lumineuſe, ni par calcination, ni par diſſolution.

Je ne crois pas cependant que les obſervations les plus importantes qu'il y ait à faire, roulent ſur les particularités de ces differentes matieres ; elles doivent avoir pour objet tous ces Phoſphores en général. Nous ſavons que ces Chaux s'impregnent avec beaucoup de facilité de la ſubſtance de la lumiere, qu'elles la conſervent quelque tems, & la perdent enfin ; mais nous ne ſavons pas trop bien comment la plupart des matieres acquierent cette proprieté par la ſeule calcination, pourquoi d'autres ont beſoin de l'addition des Sels acides, ce qui fait perdre à quelques-unes cette proprieté en peu de jours ſi elles demeurent expoſées à l'air, comment elles la recouvrent par une nouvelle calcination, enſorte que leur lumiere devient auſſi belle que la premiere fois, comme je l'ai éprouvé ; il faudroit peut-être bien des années & bien des calcinations répétées pour épuiſer cette proprieté, & peut-être n'y parviendroit-on pas. La lumiere qu'elles prennent n'eſt

n'eſt pas toujours la même, elle eſt ſouvent blanche, d'autres fois rouge, quelquefois bleue. La cauſe de ces differences n'eſt point encore connue; la couleur du feu pendant la calcination, celle des rayons qu'on fait tomber ſur la Pierre par le moyen du priſme en l'expoſant au jour, les milieux par leſquels paſſent ces rayons, les corps qui les réfléchiſſent, la quantité ou la vivacité de la lumiere, la durée du tems qu'elle y demeure expoſée, toutes ces circonſtances cauſent des varietés conſiderables, & méritent d'être obſervées avec grand ſoin. Peut-être une connoiſſance beaucoup plus exacte de la Nature de la lumiere ſera-t-elle le fruit de cet examen. Juſqu'à préſent la rareté de la Pierre de Boulogne a rendu ces recherches très difficiles; préſentement tout en peut tenir lieu, & plus il y a de differentes matieres qui produiſent les mêmes effets, plus on aura de facilité; nous trouverons dans l'une très aiſément ce qui nous eût échapé dans l'autre; enfin il eſt à croire que cela nous menera à de nouvelles connoiſſances qui pourront avoir leur utilité. J'ai déja fait pluſieurs expériences dans les vues que je viens d'indiquer: mais outre qu'il en reſte encore un bien plus grand nombre à eſſayer, je ne les ai point faites avec aſſez de préciſion pour y pouvoir compter; je pourrai cependant les donner dans une autre occaſion: mais je ſouhaiterois que d'autres perſonnes vouluſſent prendre la peine d'y travailler auſſi de leur côté, & j'oſe aſſurer que le champ eſt aſſez vaſte pour occuper pluſieurs Phyſiciens, &
pour

pour fournir un grand nombre de nouvelles découvertes & d'obſervations des plus curieuſes & des plus ſingulieres.

REFLEXIONS SUR LE MOUVEMENT DES EAUX.

Par M. PITOT *.

I. LEs avantages qu'on tire du mouvement des Eaux ſont connus de tout le monde. Comme cette partie des Mathématiques eſt une des plus utiles, elle a fait l'objet des recherches de pluſieurs habiles Mathématiciens. Heron, Majottus, Guglielmini, Caſtelli, Borelli, Toricelli, & ſur-tout Mrs. Mariotte & Varignon, ont porté cette Science à un point de perfection, qu'il ſemble qu'on n'a plus rien laiſſé à deſirer. Nous avons cru cependant que les réflexions ſuivantes pourroient avoir leur utilité, principalement pour le Calcul des Machines mues par des chutes & courans d'Eau, dont nous avons traité dans les Mémoires de l'Académie des années 1725, 1727 & 1729. Ce que nous diſons ici peut être regardé comme une ſuite de ce que nous avons donné dans ces differens Mémoires.

II. Com-

* 16 Décemb. 1730.

II. Comme la ſcience du mouvement des Eaux eſt une de celles qu'on peut appeller *Phyſico-Mathématique*, on a commencé par des expériences, pour connoitre, à peu près, les loix de leurs équilibres, de leurs vîteſſes, par rapport à la hauteur des Réſervoirs, du tems de leurs écoulemens, de la force de leurs impulſions, &c. & l'on a donné enſuite des démonſtrations géométriques de preſque tout ce que les expériences n'avoient fait qu'indiquer. Un ſeul principe qui ſert de baſe & de fondement à preſque toute cette théorie, ne paroiſſoit pas ſuſceptible de démonſtration géométrique, mais M. Varignon l'a démontré dans les Mémoires de 1703. Voici ce principe: *Les vîteſſes de l'Eau, à la ſortie des ouvertures faites au bas des Réſervoirs ou des Tuyaux de conduite, ſont entre elles comme les racines des hauteurs de l'Eau au-deſſus des ouvertures.*

III. Par ce principe on peut trouver ou connoitre quelle doit être la hauteur du Réſervoir, ou la longueur du Tuyau, pour que la vîteſſe uniforme avec laquelle l'Eau coulera & ſortira du Tuyau, ſoit égale à une vîteſſe donnée; & réciproquement la hauteur du Tuyau étant donnée, on trouvera la vîteſſe. Mais puiſque les dépenſes d'un même Tuyau ſont proportionnelles aux vîteſſes de l'Eau, on connoitra par-là les dépenſes des Tuyaux ſuivant leurs differentes longueurs & groſſeurs, & réciproquement. Voici en deux mots comment on peut faire ces calculs, & la règle qu'on doit ſuivre; il eſt vrai que M. de la Hire a parlé de cette règle dans les

les Mémoires de 1702, mais nous avons besoin de la rappeller ici.

IV. On a trouvé, par expérience, qu'un corps en tombant dans l'air libre, parcourt un espace de 14 pieds dans la premiere seconde de sa chute, & l'on sait que si ce corps continuoit à se mouvoir avec toute la vîtesse acquise par sa chute de 14 pieds, il parcourroit 28 pieds par seconde d'un mouvement uniforme. Voilà donc un rapport constant, c'est-à-dire, que nommant x la hauteur de la chute d'un corps, ou de l'Eau d'un Réservoir, & u la vîtesse uniforme que ce corps doit acquérir en tombant de la hauteur x, on aura, par le principe, $\sqrt{14} . 28 :: \sqrt{x} . u$, & $28 \sqrt{x} = u \sqrt{14}$, qu'on réduit à $56 x = uu$. Par cette égalité ou formule on fera tous les calculs entre les hauteurs des Réservoirs & les vîtesses des Eaux: car on voit, 1°. Que si la hauteur x est connue ou donnée, pour trouver la vîtesse u on multipliera la hauteur ou la valeur de x par 56, & la racine quarrée sera la valeur de u, ou de la vîtesse uniforme acquise par la chute de la hauteur x. 2°. Mais si la vîtesse u est donnée, on en prendra le quarré, qu'on divisera par 56, & le quotient sera la hauteur x. On voit aussi que si l'on décrit la parabole, dont $56 x = uu$ est l'Equation, les abscisses x marqueront les hauteurs des Réservoirs, & les ordonnées u les vîtesses uniformes des Eaux. Ces règles conviennent également à toutes sortes de chutes d'Eau, de quelle grandeur & figure que soient les ouvertures des Réservoirs & des Tuyaux de conduite.

V. Donc

V. Donc la vîteſſe de l'Eau dans les Tuyaux eſt toujours uniforme, égale à la vîteſſe d'un corps acquiſe en tombant de la hauteur du niveau de l'Eau du Réſervoir au-deſſus de ſon ouverture; & par conſéquent la vîteſſe ou la chute de l'Eau dans les Tuyaux eſt toujours double, ou ſe fait dans la moitié moins de tems que par ſa chute de la même hauteur dans l'air libre.

VI. * Voilà la raiſon d'où vient que la vîteſſe de l'Eau à l'orifice *T*, quoique plus grande que ſa vîteſſe en *P*, ſa quantité eſt cependant la même; car pour que la quantité d'Eau en *T* fût proportionnelle à ſa vîteſſe, il faudroit què la vîteſſe à l'orifice *P* fût égale à celle de *T*, ce qui ne ſauroit être, les Tuyaux étant de differentes hauteurs.

VII. Cette conſideration peut être utile dans les Machines mues par des chutes d'Eau, pour placer avantageuſement la Roue de Moulin, ou la Roue qui porte les Aubes, & calculer exactement l'action de l'Eau ſur les Aubes, ou la force motrice de la Machine. Car ſoit, † par exemple, deux Roues de Moulin *V* & *X*, placées au bas d'un Réſervoir, l'une en *P*, & l'autre en *T*, je dis qu'on ne doit pas calculer la force de l'Eau ſur les Aubes de la Roue *X* par la méthode ordinaire; car pour connoitre la force de l'impulſion de l'Eau ſur les Aubes d'une Roue ou de toute autre ſurface, ſa vîteſſe étant connue, on prend, par la méthode ordinaire, le poids d'un ſolide d'Eau qui a pour baſe la ſurface cho-

* Fig 1. † Fig. 2.

choquée, & pour hauteur celle d'où l'Eau doit tomber pour acquérir cette vîtesse. Or lorsque la hauteur du Réservoir est connue, la valeur de ce solide l'est aussi, dont le poids, à raison de 70 livres le pied-cube, est la valeur de la force de l'impulsion, ou choc perpendiculaire de l'Eau sur les Aubes de la Roue de Moulin. Mais si au contraire la vîtesse de l'Eau est donnée, on trouvera facilement la hauteur du Réservoir par l'égalité $56\,x = uu$, comme il a été expliqué ci-dessus.

Voilà le calcul qui convient aux Aubes de la Roue *V*, parce qu'on peut les regarder comme placées immédiatement au-dessous de l'ouverture *P*. Mais si on vouloit appliquer ce même calcul aux Aubes de la Roue *T*, l'Eau ayant parcouru l'espace *PT* dans l'air libre, on trouveroit une force plus grande qu'elle ne seroit réellement, & on se tromperoit; en voici la raison, & en même tems la méthode de faire les Calculs pour les Roues disposées de cette sorte. Puisque les forces des impulsions sont égales aux solides d'Eau qui ont pour base la surface des Aubes, laquelle surface doit être égale à l'orifice du Tuyau, & pour hauteur celle du niveau de l'Eau du Réservoir, si le Tuyau descendoit jusqu'en *T*, l'impulsion de l'Eau sur l'Aube placée en *T* seroit à l'impulsion sur l'Aube placée en *P*, comme la hauteur *TK* à la hauteur *PK*, parce qu'alors ses impulsions sont en raison composée de celle des vîtesses, ou comme $\sqrt{TK}$ à $\sqrt{PK}$, & de la raison des quantités d'Eau écoulées en tems égaux par

 les

les orifices *T* & *P*; or cette raiſon étant la même que celle des vîteſſes, l'impulſion ſur l'Aube en *T* ſera à l'impulſion ſur l'Aube en *P* comme les quarrés des vîteſſes, ou comme *TK* à *PK*. Mais ſi le Tuyau ne deſcend que juſqu'en *P*, les quantités d'Eau écoulées ſeront les mêmes, & alors les impulſions ſeront néceſſairement dans la raiſon ſimple des vîteſſes, ou comme $\sqrt{TK}$ à $\sqrt{PK}$.

VIII. On voit par-là l'avantage qu'il y a de conduire l'Eau avec un Tuyau le plus près qu'il eſt poſſible de la Roue de Moulin, ou de mettre les Aubes le plus près qu'on peut de l'ouverture faite au bas des Réſervoirs, au-lieu de la laiſſer tomber dans l'air libre, ou même ſur un plan incliné par le moyen d'une rigole en forme de gouttiere, comme je l'ai vu pratiquer à pluſieurs Roues pour mouvoir des Soufflets & Marteaux de Forges; à moins qu'on ne ſoit aſſujetti par la quantité d'Eau que l'on a à dépenſer: mais en ce cas il vaut mieux faire les ouvertures & les aubes plus petites.

IX. Ce que nous venons de dire des chutes d'Eau verticales, ſe doit entendre des chutes inclinées à l'horizon, en prenant leurs hauteurs verticales pour leurs hauteurs propres, ce qui à été démontré par tous ceux qui ont écrit des Hydrauliques ou Mouvemens des Eaux.

X. L'Eau coulante ou courante ſur des plans inclinés doit accélérer ſa vîteſſe ſuivant les racines des hauteurs perpendiculaires, ou, ſi l'on veut, ſuivant les racines des longueurs

du

du plan parcourues, cela eſt connu. Or puiſque les lits des Fleuves, des Rivieres & des Aqueducs, ſont des plans inclinés, la vîteſſe de leurs Eaux doit, par cette raiſon, s'accélérer & augmenter depuis leurs ſources juſqu'à leurs embouchures: ainſi, ſuivant ce principe, on trouveroit aiſément par l'Equation de l'Art. IV, la vîteſſe du courant des Rivieres, leurs pentes étant données, & réciproquement la hauteur ou l'inclinaiſon de leurs pentes, les vîteſſes étant connues. Mais deux cauſes principales dérangent totalement cette règle; ces cauſes ſont, la premiere, la réſiſtance que les Eaux des Fleuves & grandes Rivieres trouvent à leurs embouchures en ſe déchargeant dans la Mer; & la ſeconde, les frottemens des Eaux contre les ſurfaces du fond & des bords.

Sans cette réſiſtance & ces frottemens, les Eaux des Rivieres s'accéléreroient, comme nous venons de dire, depuis leurs ſources juſqu'à leurs embouchures, leurs rapidités ſeroient beaucoup plus conſiderables, plus grandes vers leurs fonds qu'à leurs ſurfaces, & leurs largeurs ou profondeurs diminueroient depuis leurs ſources juſqu'aux embouchures.

XI. Je conſidere d'abord quel ſeroit l'état des Fleuves, ſi la réſiſtance & les frottemens, dont nous venons de parler, étoient nuls; & je ſuppoſe de plus que toute l'Eau d'un Fleuve part d'une ſeule & même ſource, & coule ſur un plan parfaitement droit, en telle ſorte que les Eaux gardent toujours le même niveau de pente, la profondeur du lit ſoit par-tout la même.

Par ces suppositions, il est évident, 1°. Que dans toute la longueur du Fleuve, il s'écoulera en tems égaux des quantités ou des masses égales d'eau. 2°. Que la vîtesse des Eaux augmentant ou s'accélérant toujours depuis la source jusqu'à l'embouchure, & la profondeur étant supposée par-tout la même, la largeur entre ces bords doit toujours diminuer, & cela dans le rapport réciproque des vîtesses, ou en raison renversée des racines des hauteurs, ou des longueurs parcourues depuis la source. Ainsi si les Eaux d'un Fleuve, après avoir parcouru l'espace EF depuis la source E, la largeur entre ces bords est AB; lorsqu'elles seront parvenues en G, la profondeur étant supposée la même par-tout, la largeur CD doit être à la largeur AB, comme la vîtesse de l'Eau en F est à sa vîtesse en G: car, en tems égaux, il doit passer entre AB & CD des quantités ou des masses égales d'Eau.

XII. Si l'on nomme EF (a), FG (x), AB ($2b$), & CD ($2y$), puisqu'on peut exprimer les vîtesses de l'Eau en F & en G, par $\sqrt{EF}$ & $\sqrt{EG}$, ou par $\sqrt{a}$ & $\sqrt{x}$, on aura $2y : 2b :: \sqrt{a} . \sqrt{x}$, d'où l'on tire cette Equation $abb = xyy$, qui montre que dans ces suppositions chaque bord du Fleuve est une hyperbole du second genre: ces hyperboles ont la ligne EFG pour asymptote commune.

XIII. Comme les Eaux des Fleuves sont plus basses vers le fond, par rapport à la hauteur de leurs sources, que celles de la surface, leur vîtesse doit, par cette raison, être

être plus grande près du fond que vers la surface. Or la hauteur de la source & la profondeur des Eaux étant connues, il seroit aisé de déterminer par le principe général, la difference entre la vîtesse du fond & celle de la surface, & réciproquement cette difference étant connue, on trouveroit la hauteur de la source. Guglielmini donne sur ce principe une méthode pour trouver l'origine ou la hauteur de la source d'un Fleuve, en connoissant par expérience deux vîtesses des Eaux prises dans des profondeurs differentes.

XIV. Nous avons dit ci-dessus que la vîtesse ou la rapiditédes Eaux des Fleuves & des Rivieres seroient très considerables, si elles n'étoient rallenties par la résistance qu'elles trouvent à l'embouchure, en se déchargeant dans la Mer, & beaucoup plus encore par les frottemens considerables qu'elles souffrent dans tout leur cours, en roulant sur des plans inégaux & très raboteux. Pour déterminer ce que les Fleuves doivent perdre de leurs vîtesses, depuis leus sources, par la résistance des Eaux de la Mer à leurs embouchures; je considere d'abord la vîtesse que prendroit une surface plane, poussée en même tems par deux fluides mûs dans des directions directement opposées.

Si la surface AC est poussée par l'action du fluide $BADC$ dans la direction EL, & en même tems par le fluide $MAPC$ dans la direction EK, directement opposée, & qu'on nomme M la masse du premier fluide, & V sa vîtesse, m la masse du second, u sa vîtesse, & x la vîtesse que la surface doit prendre

dans la direction EL, en supposant que le premier fluide doive l'emporter sur le second. $u+x$ sera la vîtesse respective du fluide $MAPC$ contre la surface, & $V-x$ celle du fluide $BADC$. Or, il est évident que la vîtesse x doit être telle que le produit des masses de chaque fluide par le quarré de leurs vîtesses respectives contre la surface, soient égaux, on aura donc cette égalité

$$\overline{uu+2ux+xx} \times m = \overline{VV-2Vx+xx} \times M,$$

de laquelle on tirera la valeur de x. Si les masses sont égales, ou que les fluides soient les mêmes, tous deux de l'Eau, ou tous deux de l'Air, on aura $x=\frac{VV-uu}{2V-2u}=\frac{V+u}{2}$; & si l'on suppose de plus que le fluide $MAPC$ soit en repos, on aura $u=0$ & $x=\frac{1}{2}V$.

D'où l'on voit que si $BADC$ représente le cours d'un Fleuve, AC son embouchure ou son entrée dans la Mer, $AMPC$, qu'il y ait une surface en AC ou non, l'Eau du Fleuve doit perdre la moitié de sa vîtesse à la rencontre des Eaux de la Mer; l'on voit encore que les Eaux du Fleuve conservent toujours leur même niveau de pente. Si les dernieres parties, ou la derniere tranche AC est retenue de la moitié, toutes les autres seront retenues d'une quantité qui rendra leurs vîtesses uniformes & égales à la moitié de la plus grande vîtesse des Eaux avant leur rencontre avec celles de la Mer; & il est encore évident que cette diminution doit se faire sentir jusqu'aux $\frac{3}{4}$ de la longueur du Fleuve depuis son embouchure, en remontant vers

vers sa source, car la vîtesse acquise depuis la source jusqu'au quart de sa longueur est égale à la moitié de la vîtesse que les Eaux doivent acquérir par leurs chûtes de toute la pente du Fleuve.

XV. Voilà la premiere cause qui diminue la vivacité ou la rapidité des Fleuves, & qui rend leur cours presque uniforme. Les frottemens sont une cause de diminution beaucoup plus considerable, comme nous allons voir; mais on ne sauroit les réduire au calcul, il faut avoir recours à l'expérience. Nous comprenons ici sous le nom de *frottement des Eaux*, les détours des filets d'Eau à la rencontre des petites éminences du fond raboteux des Rivieres. Si *AB* est le fond ou lit d'une Riviere, les filets d'Eau *ab* rencontrant de petites éminences en *b*, se détournent dans une direction comme *bc*, & sont en même tems entraînés par les filets supérieurs, ce qui rallentit nécessairement leurs vîtesses de quelque chose: or ces détours, quoique petits, sont en si grand nombre dans tout le cours d'une Riviere, que cette cause est, je pense, la plus considerable qui arrête & retarde les Eaux.

XVI. Une preuve bien sensible que les frottemens rallentissent considerablement le courant des Eaux, est que plus les Fleuves & les Rivieres baissent ou diminuent, plus leurs vîtesses se rallentissent, & au contraire plus elles augmentent ou s'enflent, plus leurs rapidités augmentent; & on sait que dans les grandes Eaux, leur courant devient double, triple, & quelquefois quadruple de celui de

leur état moyen. Elles coulent cependant sur la même pente, & le même plan incliné.

XVII. Mais voici une 2de preuve de la quantité considerable des frottemens. Par les nivellemens de M. Picard, de la justesse desquels on ne sauroit douter, la Riviere de Loire a au moins trois fois plus de pente que la Seine, & cependant la vîtesse des Eaux de la Seine est presque double de celle de la Loire; la raison est que le lit de la Loire a peu de profondeur, puisqu'elle n'est souvent pas navigable, & qu'elle ne porte que des Bateaux très petits, en comparaison de ceux de la Seine: or il est bien certain qu'une petite quantité d'Eau recevant tous les frottemens, doit être bien plus rallentie qu'une plus grande quantité. Mais aussi lorsque les Eaux de ces deux Rivieres grossissent, la vîtesse ou le courant de la Loire augmente en plus grande raison que le courant de la Seine; ce qui rend la Loire plus sujette à déborder & à changer de lit, toutes choses d'ailleurs égales.

Le Rhône & le Rhin ont la profondeur de leurs lits beaucoup plus grande que la Seine & la Loire, c'est aussi par cette raison que ces Fleuves sont beaucoup plus rapides.

XVIII. Voyons quelle seroit, à peu près, la rapidité extrême des Rivieres, si les frottemens étoient nuls, & la résistance de l'air. Je fais ce calcul pour la Seine, dont la pente depuis Paris jusqu'à la Mer est environ de 110 pieds; & comme Paris est presque dans le milieu entre les sources & l'embouchure de la Seine, prenons 200 pieds pour toute la pente

K

Fig. 2.

P

V

T

X

Fig. 4.

A M

E L

C P

C

G

D

c c c

b b a b

B

pente de cette Riviere. Si l'on ſubſtitue dans $56x = uu$, 200 à la place de x, on aura la vîteſſe $u = 106$, dont il faut prendre la moitié, à cauſe de la réſiſtance des Eaux de la Mer, pour avoir 53 pieds par ſeconde pour la vîteſſe extrême que les Eaux de la Seine auroient, ſi les frottemens étoient nuls : cette vîteſſe eſt la même, à peu près, que celle d'un jet d'Eau de 50 pieds de hauteur à la ſortie de ſon ajoutoir.

Les frottemens des Eaux contre le fond & les bords des Rivieres ſont donc très avantageux ; car ſans eux les Rivieres ne feroient pas navigables, tant par leur trop grande rapidité, que par le peu de profondeur qu elles auroient.

RECHERCHES ANATOMIQUES SUR LES OS DU CRANE DE L'HOMME.

Par M. HUNAULD. *

I.

VESALE, & après lui des Anatomiſtes de grande réputation †, nous ont dit, qu'en

* 6 Decemb. 1730.

† *Veſale, de Corporis humani fabricâ, lib* 1. *cap.* 6. *Euſtachius, Oſſium examen. Fallope, expoſitio de Oſſibus, cap.* 13. *Spigel, de humani Corporis fabricâ, lib.* 2. *cap.* 7. *Mém. de l'Acad. Royale des Sc. de* 1720. *p.* 347.

qu'en examinant la calotte du Crâne humain, on ne remarque ſur ſa face concave, à l'endroit des ſutures, que des lignes plus ou moins irrégulieres, au-lieu qu'à ſa face convexe les dents (comme tout le monde le fait) y ſont très ſenſibles. On peut encore expoſer cette même remarque d'une autre façon, en diſant, que les dents qui uniſſent les os coronal, pariétaux & occipital entre eux, ne ſe trouvent qu'à la Table externe & au Diploé, & qu'il n'y a point de dentelure à la Table interne de ces os.

Prévenu en faveur d'une obſervation qui vient de ſi bonne part, & que j'avois vérifiée pluſieurs fois, je fus fort étonné en y trouvant par la ſuite des exceptions. Je voulus m'aſſurer, en examinant quantité de Crânes, ſi ces exceptions n'étoient point un jeu de la Nature, & voici ce que j'ai trouvé.

Les Crânes qu'on étudie le plus, & dont on ſépare les os pour la démonſtration, ſont aſſez ſouvent des Crânes de Sujets morts au-delà de la jeuneſſe. On ne trouve point pour l'ordinaire de dents à la Table interne de ces Crânes, & plus les Sujets ſont avancés en âge, & plus l'union des os en dedans de la calotte du Crâne paroît en forme de lignes; ces lignes même s'effacent entierement dans la vieilleſſe. Au contraire, dans le bas âge il y a des dents à la Table interne de la calotte du Crâne, & les ſutures paroiſſent à ſa ſurface concave. Ces dents & ces ſutures y ſont d'autant plus apparentes que les Sujets ſont plus jeunes. Voilà une varieté bien certaine, bien conſtante, & qui fait porter à faux

faux l'obſervation de Véſale, & des autres Anatomiſtes que je viens de citer. C'eſt de cette varieté dont je vais tâcher de déveloper les cauſes.

Une Voûte a plus d'étendue à ſa ſurface convexe qu'à ſa ſurface concave, & plus une Voûte eſt épaiſſe, & plus ſa ſurface interne eſt petite par rapport à l'externe. Cette difference d'étendue eſt cauſe que les pieces qui compoſent une Voûte doivent être taillées obliquement pour être appliquées les unes à côté des autres. Si l'on ſuppoſe que les pieces d'une Voûte faſſent également effort pour s'augmenter ſuivant toutes leurs dimenſions, la preſſion de ces pieces les unes contre les autres ſera plus forte vers la ſurface concave, que vers la ſurface convexe. Ces idées ſimples, appliquées à ce qui ſe paſſe dans l'augmentation du Crâne, fourniront, je crois, la raiſon que je cherche.

Dans l'enfance, le Coronal, les Pariétaux & l'Occipital commencent peu à peu à s'ajuſter enſemble par le moyen des dents & des échancrures qui ſe trouvent à leurs bords. Ces os ſont alors très minces, & les dents qui ſe trouvent gravées dans toute leur épaiſſeur, ſont auſſi longues à la Table interne qu'à l'externe; ainſi les ſutures coronale, ſagittale & lambdoïde, paroiſſent à la ſurface concave de la calotte du Crâne de même qu'à la ſurface convexe. Mais bientôt enſuite les choſes changent. Les os du Crâne ſe preſſent mutuellement les uns & les autres, à meſure que leur étendue augmente: comme en même tems leur épaiſſeur devient plus conſiderable, il

faut néceſſairement que les dents ayent moins de longueur à la Table interne qu'à l'externe, & il faut que la pointe de ces mêmes dents ſoit taillée obliquement, car la calotte du Crâne, ainſi qu'une Voûte, a moins d'étendue à ſa ſurface concave qu'à ſa ſurface convexe; ainſi les bords des os qui la compoſent, pour pouvoir s'appliquer à côté les uns des autres, doivent être taillés obliquement.

A meſure que l'épaiſſeur du Crâne augmente, les dents deviennent de plus en plus moins longues à la Table interne qu'à l'externe. Cette inégalité de longueur fait que les échancrures, qui ne ſont que les interſtices des dents, ont auſſi moins d'étendue à la ſurface concave du Crâne qu'à la ſurface convexe; par conſéquent ſi l'on regarde le dedans de la calotte du Crâne, quand il commence à acquérir une certaine épaiſſeur, les ſutures y doivent paroitre moins conſiderables qu'à ſa ſurface externe.

Voilà donc déja les dents moins longues & les échancrures moins profondes à la Table interne qu'à l'externe; mais il y faut encore quelque choſe de plus, car avec l'âge les échancrures ſe rempliſſent entierement à la Table interne, & les dents y diſparoiſſent entierement.

Lorſque les os de la calotte du Crâne commencent à ſe preſſer réciproquement par l'augmentation de leur étendue, la partie de la pointe des dents, qui appartient à la Table interne, preſſée contre les échancrures de l'os oppoſé, trouve moins de réſiſtance* vers

* Fig. 1.

vers la ſubſtance ſpongieuſe du Diploé que contre la Table interne des échancrures où ces dents ſont engagées: cette partie de la pointe des dents qui appartient à la Table interne, ſe dirigera donc vers le Diploé. Le peu d'épaiſſeur de la Table interne rend cette détermination facile. La Table interne de la dent, en ſe portant ainſi vers le Diploé, forme un talus, & perd le niveau du dedans du Crâne; mais la Table interne du fond de l'échancrure en profite bientôt en s'avançant ſur le talus de la dent oppoſée, & elle s'y avance d'autant plus, que les os faiſant plus d'effort les uns contre les autres vers leur ſurface concave qu'ailleurs, y ſont plus diſpoſés à s'étendre vers les endroits où il ſe trouve une diminution de réſiſtance.

Voilà donc en même tems deux nouvelles cauſes qui contribuent à effacer les ſutures du dedans de la calotte du Crâne. 1°. Toute la pointe des dents, qui ſe releve vers le Diploé, ceſſe de paroitre en dedans du Crâne. 2°. La Table interne qui s'avance du fond de chaque échancrure, diminue la longueur des dents du côté de leur racine; ainſi par ce double moyen, peu à peu & avec le tems, les dents ſe trouvent effacées au dedans du Crâne, il n'y paroît plus de ſuture, & l'union des os ne s'y fait appercevoir que par des lignes.

On peut facilement s'aſſurer de la vérité de ce que je viens de dire; car dans les Crânes d'un certain âge, après qu'on en a ſéparé les os, on voit à la ſurface concave la pointe des dents taillée en talus. Ce talus ſe remarque

encore mieux en rajuſtant ces os ſéparés. On voit auſſi la Table interne du fond de chaque échancrure qui s'avance conſiderablement vers l'os oppoſé, & le bord de ces avances eſt très mince.

La pointe des dents qui appartient à la Table interne, ſe porte vers le Diploé, & non pas vers le dedans du Crâne, parce que les fibres * *AB*, dont la dent *BD* eſt une continuation, en ſe déterminant vers le Diploé *D*, affectent plus la ligne droite, au-lieu qu'en ſe réfléchiſſant en dedans du Crâne *C*, elles feroient un angle *ABC*. Or le ſuc qui coule continuellement dans ces fibres, tend plutôt à leur donner la *rectitude*, ou, ce qui eſt la même choſe, à les diriger vers *D*.

On ne peut pas dire que par la même raiſon la partie de la dent, qui appartient à la Table externe, devroit ſe réfléchir à l'extérieur du Crâne; car 1°. la Table externe eſt plus épaiſſe que l'interne, ainſi la Table externe des dents d'un os, & la Table externe des échancrures de l'os oppoſé, ſe touchent par une plus grande ſurface que leurs Tables internes. 2°. Les dents ne ſont pas preſſées, contre les échancrures qui les reçoivent, auſſi fortement à la Table externe qu'à la Table interne. Je pourrois encore aſſigner une autre cauſe qui rend l'effort des os, les uns contre les autres, plus grand à leur Table interne qu'à l'externe; c'eſt l'action continuelle du Cerveau, qui cauſée par le battement continuel des arteres, oblige la Table interne à s'étendre, & augmente la preſſion de ce côté-là. Il

* Fig. 1.

Il arrive ſouvent, par un effet de cette preſſion plus forte à la Table interne qu'à l'externe, que la partie de la dent *BD*, qui s'eſt déterminée vers le Diploé *D*, devient plus longue que la partie de la dent qui eſt à la ſurface convexe. Les fibres de la Table interne d'un os trouvant dans la Table interne de l'os oppoſé beaucoup de réſiſtance à leur allongement, s'allongent d'autant du côté où elles rencontrent moins de réſiſtance. Voilà d'où vient la longueur des pointes qui ſont engagées dans le Diploé.

On ſait aſſez combien les dents qui forment les ſutures, contribuent à affermir l'union des os; cependant on pourroit dire que ſi les deux Pariétaux, par exemple, étoient ſeulement appliqués l'un contre l'autre, ſans qu'il y eût de dents à leur bord ſupérieur, ils ne pourroient être enfoncés, à moins qu'il n'arrivât fracture, par un fardeau appuyé ſur la ſuture ſagittale, ni par un coup donné ſur la même ſuture ou aux environs (je ſuppoſe que la partie inférieure de ces os ſoit bien retenue). En voici la raiſon. La Table externe des Pariétaux eſt plus grande que leur Table interne, à cauſe que la calotte du Crâne a plus d'étendue à ſa ſurface convexe qu'à la ſurface concave: ainſi la Table externe d'un Pariétal eſt retenue par la Table interne de l'autre Pariétal. En effet l'enfoncement ne peut arriver, que le bord ſupérieur du Pariétal droit n'avance ſur le côté gauche, & que le bord ſupérieur du Pariétal gauche n'avance ſur le côté droit, d'où il naît un obſtacle à la depreſſion de la partie ſupérieure des deux Pa-

riétaux

riétaux. Mais lorſque le Crâne n'a encore que peu d'épaiſſeur, & que la Table interne d'un os eſt, à très peu de choſe près, auſſi étendue que l'externe, ſi l'on ſuppoſe que les Pariétaux ne ſe touchent que par un bord tout uni, ils vacilleront, & ne ſe ſoutiendront pas l'un l'autre, mais les dents d'un Pariétal s'avançant ſur la Table interne du Pariétal oppoſé, & *vice verſâ*, aſſujettiſſent le bord ſupérieur des Pariétaux, & s'oppoſent à leur enfoncement. Ce que je viens de dire des deux Pariétaux, regarde tous les os unis par ſuture dentelée.

Pour revenir aux Sutures, les dents qui les compoſent, ne ſont pas toutes de la même longueur. Les petites dents qui ne ſont ſéparées que par de petites échancrures, diſparoiſſent les premieres. Pluſieurs dents d'une longueur inégale, placées à côté les unes des autres, ſe confondent, & n'en font plus qu'une d'une largeur conſiderable, lorſque les interſtices qui les ſéparent, ſont remplis. Il ſe trouve encore des dents beaucoup plus longues que les autres : celles-ci diſparoiſſent plus tard, ou ne diſparoiſſent même jamais entierement. Toutes ces inégalités donnent à l'union des os, en dedans du Crâne, la figure de lignes irréguliéres.

On voit, par tout ce que je viens de dire, que s'il ne paroit point de dents à la ſurface concave du Crâne, ce n'eſt point pour empêcher, comme on le dit ordinairement, que la Dure-mêre ne ſoit bleſſée dans les cas de fracture ou d'enfoncement à l'endroit des ſutures, mais c'eſt par une ſuite néceſſaire de

de la conformation des os du Crâne & de sa figure.

Lorsque les dents de la Table interne sont effacées, & que les sutures ont disparu du dedans du Crâne, les os qui le composent, ne laissent pas encore quelquefois de s'étendre. Le Diploé, en s'épaississant de nouveau, écarte les deux Tables; ces Tables même augmentent en épaisseur: aussi voit-on dans les Sujets d'un certain âge, & sur-tout dans ceux dont les Crânes sont fort épais, que les dents n'occupent pas la moitié de l'épaisseur des os; ensuite les os s'unissent & se soudent insensiblement ensemble, de sorte que la plupart des differentes pieces de la calotte du Crâne n'en font plus qu'une. Ils commencent à se souder par la Table interne, parce que la partie interne de la membrane, dont je parlerai dans la suite de ce Mémoire, s'ossifie la premiere; ou, si l'on veut, en attendant une autre cause, on peut dire que le suc osseux tendant toujours à étendre & à dilater les fibres des os dans le tems même que le Crâne ne peut plus augmenter de volume, les surfaces par lesquelles les os se touchent à force de se presser, s'unissent & se soudent ensemble. Or comme la pression de ces os est plus forte à la Table interne qu'à l'externe, les os commencent à se souder par leur Table interne; ainsi s'effacent jusqu'aux lignes qui en dedans du Crâne distinguoient auparavant les differens os. Peu à peu la soudure gagne, pour ainsi dire, de la Table interne vers l'externe, les dents d'un os se soudent avec les dents d'un os voisin, & ce n'est qu'après beaucoup

coup de tems que le suc osseux, en passant & repassant d'un os à l'autre, fait disparoitre de la surface convexe du Crâne les marques même des sutures.

Ces observations & les suivantes, que m'a fourni l'examen d'un grand nombre de Crânes, sont aussi assurées que s'il avoit été possible de les faire toutes successivement sur un même Sujet. On ne peut en vérifier toutes les circonstanees, qu'en examinant des Crânes de differens âges, & en séparant avec attention les os qui les composent.

Au reste, il paroîtra peut-être que je me suis un peu trop étendu sur la matiere que je viens de traiter; mais si l'on fait attention que personne ne l'avoit encore examinée avec des yeux Physiciens, on verra que j'ai été obligé de peser un peu plus que je n'eusse fait, sur les raisons que j'ai donné. J'eusse encore été beaucoup plus long, si j'eusse voulu suivre la plupart des Auteurs jusques dans les petits détails de quantité de petites choses où ils sont entrés à l'occasion des Sutures, détails qui quelquefois sont peu justes, souvent inutiles, & toujours ennuyeux, lorsqu'une saine théorie ne les accompagne pas.

I I.

Les os nommés Surnumeraires, Clefs, ou *Ossa Wormiana*, suivent, quand ils se trouvent, la même analogie que les autres os du Crâne. Comme ils sont partie de la Voûte du Crâne, ils paroissent plus grands au dehors qu'au dedans, & plus le Crâne où ils se trouvent est épais,

épais, plus leur ſurface interne eſt petite à l'égard de l'externe. Les dents qu'ils avoient d'abord gravées dans les deux Tables, diſparoiſſent peu à peu de l'interne, & leur union avec les autres os ne s'y remarque que comme une ligne. Il leur arrive encore avec l'âge ce qui arrive aux autres os du Crâne, c'eſt de s'unir avec eux en dedans, pendant qu'à la ſurface convexe ils en paroiſſent encore diſtingués, de ſorte qu'on jugeroit d'abord qu'ils ne pénétrent pas, & qu'ils n'ont jamais pénétré juſques dans la concavité du Crâne. Je ne nie pas pour cela qu'il n'y ait de petits os ſurnumeraires qui ne s'étendent pas juſqu'au dedans du Crâne.

J'ai vu des os ſurnumeraires tout-à-fait differens de ces derniers, & dont perſonne, je crois, n'a encore parlé. Ils paroiſſent à l'intérieur du Crâne, & ne s'étendent pas juſqu'à la Table externe: il y en a dans beaucoup de Crânes, ils ſont placés à l'endroit des ſutures. Ils tombent ordinairement quand on démonte les pieces du Crâne; & lorſqu'on remonte ces pieces, on croit, ſans y faire trop d'attention, que le vuide, qu'ils ont laiſſé en ſe détachant, eſt cauſé par la rupture d'une dent.

Il me ſemble avoir remarqué que dans les petits Crânes les dents diſparoiſſent, & les ſutures s'effacent plutôt que dans des Crânes plus grands & plus étendus. Si cela eſt, c'eſt apparemment une ſuite de la difference qui ſe trouve entre la ſurface concave & la ſurface convexe dans une Voûte plus ou moins cintrée.

L'exa-

III.

L'examen des Suturnes vrayes ou dentelées m'a conduit naturellement à l'examen des Sutures fausses ou écailleuses. La difference qui se trouve entre ces deux sortes de Sutures, montre assez que leurs usages doivent être differens. Dans l'une les os s'unissent par le moyen des avances & des enfoncemens qui sont à leurs bords: dans l'autre le bord d'un os est appliqué sur le bord d'un autre os, & pour s'ajuster ainsi, ils sont tous les deux taillés en bizeau. Presque tous les Anatomistes ont ou proposé des raisons de cette difference, ou ont adopté quelques-unes des raisons qu'on avoit proposé avant eux ; cependant en les examinant toutes, on sent bien qu'on n'en a point encore trouvé de suffisantes. Celle que je vais proposer, me paroit mieux fondée.

Un fardeau appuyé sur une Voûte, ou le poids seul de la Voûte, tend à déjetter en dehors les murs ou les piliers qui la soutiennent: c'est par une résistance placée en dehors de la Voûte qu'on s'oppose à cet effort. Voilà à quoi servent les murs-boutans & les arcs-boutans.

* Un fardeau considerable *A*, placé sur le sommet de la Tête, tend à enfoncer en dedans la suture sagittale *B*, ou, ce qui est la même chose, le bord supérieur *CC* de chaque Pariétal *C D*, *C D*; cela ne se peut faire que le bord inférieur *D*, *D*, des Pariétaux ne soit écar-

* Fig. 2.

écarté & déjetté en dehors. Un coup donné sur le haut de la Tête fait la même chose. Or, c'est à cet écartement en dehors des bords inférieurs des Pariétaux que s'opposent les Temporaux *FF*. Etant appliqués fortement, comme ils le sont, contre la partie inférieure de chaque pariétal, ils font la fonction de véritables murs-boutans qui retiennent & assujettissent les Pariétaux.

Un effet de la suture dentelée est de contribuer à empêcher que les pieces qui la forment, ne s'enfoncent en dedans, comme je l'ai fait voir plus haut; mais elle ne s'oppose point à leur écartement en dehors; il n'y a que la partie de quelques dents engagée dans le Diploé qui y pourroit faire un obstacle, mais bien foible. Une suture dentelée qui uniroit les Pariétaux avec les Temporaux, résisteroit à une compression faite sur la partie laterale de la Tête, ou à un coup porté sur le même endroit; mais elle ne s'opposeroit pas à l'écartement en dehors causé par un fardeau ou un coup sur le sommet de la Tête: & c'est-là ce que font merveilleusement bien les Temporaux par la portion écailleuse, ou le bizeau qui est à leur bord supérieur, & qui s'applique si parfaitement à l'écaille ou bizeau du bord inférieur des Pariétaux. Ce que je viens de dire de la portion écailleuse de l'os des Tempes se doit également entendre des deux portions écailleuses de l'os sphénoïde, qui s'appliquent de la même maniere sur l'angle antérieur & inférieur de chaque Pariétal.

Pendant que la suture écailleuse s'oppose à l'écartement du bord inférieur des Pariétaux, la

la suture sagittale qui est dentelée, s'oppose, comme je l'ai dit, à l'enfoncement de leur bord supérieur. C'est par ce double moyen que les Pariétaux sont en état de soutenir des fardeaux aussi considérables que ceux qu'on voit sur la Tête de quantité de gens; la suture sagittale a même d'autant moins à souffrir de l'action d'un fardeau, que les Temporaux arc-boutent plus fortement. Si l'on fait attention que dans la suture sagittale, ainsi que dans les autres sutures dentelées, les dents d'un os sont appuyées seulement sur la Table interne de l'os opposé, laquelle est fort mince, & que les dents ont beaucoup moins d'épaisseur que le reste de l'os, on verra combien il importe que la partie inférieure des Pariétaux soit solidement assujettie: ainsi les Temporaux arc-boutant avec force, soutiennent une partie du fardeau appuyée sur la suture sagittale, & la soulagent de cette façon.

A présent, on peut bien facilement répondre à une question que se sont fait la plupart des Anatomistes, & qui leur a paru si embarrassante. Ils demandent pourquoi la portion écailleuse des Temporaux * recouvre en dehors la portion écailleuse des Pariétaux, & pourquoi au contraire le bord des Pariétaux n'est pas à l'extérieur †.

Pour que les Temporaux puissent faire la fonction de murs-boutans, il faut qu'ils soient, pour ainsi dire, inébranlables dans leur situation.

* Fig. 2.

† *Vésale, lib. 1. cap. 6. Fallope, expositio de Ossibus, cap. 13. Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de 1720, p. 149. &c.*

tion. C'eſt auſſi ce qu'on reconnoit en démontant les pieces d'un Crâne, lorſqu'après avoir ôté les Pariétaux, on tire en dehors le bord ſupérieur des Temporaux encore unis avec l'os occipital & l'os ſphénoïde. On ne ſera point étonné de leur fermeté, en conſiderant de quelle façon chaque os des Tempes eſt engagé & aſſujetti par le moyen de l'Occipital & du Sphénoïde.

Un coup porté ſur le bas des Pariétaux fait tout le contraire d'un coup donné ſur la ſuture ſagittale, ou d'un fardeau appuyé ſur la même ſuture; il tend à enfoncer en dedans la partie inférieure des Pariétaux, & à déjetter en dehors leur partie ſupérieure. Tout l'artifice dont j'ai parlé, & qui eſt ſi propre à empêcher l'effet d'un fardeau ou d'un coup ſur le ſommet de la Tête, ne s'oppoſe nullement à l'effet d'un coup donné ſur le bas d'un Pariétal. Voici ce qui réſiſte à un pareil coup.

* Le bord ſupérieur du Coronal eſt ſoutenu pour l'ordinaire par les Pariétaux; mais aux parties laterales du Coronal, on voit la Table interne, qui beaucoup plus longue que l'externe, fait une avance aſſez conſiderable *BC* † qui ſoutient un pareil prolongement *FG* ⸸ de la Table externe des Pariétaux: ainſi un Pariétal pouſſé vers le dedans par un coup donné à ſa partie inférieure, eſt retenu par cette avance de la Table interne du Coronal. Il y a de plus au bord ſupérieur de l'os des Tempes, entre la portion écailleuſe & la portion pierreuſe, une échancrure d'une figure ‡ particuliere, où s'engage la partie *H* du Parié-

* Fig. 3. & 6. † Fig. 4. ⸸ Fig. 5. ‡ Fig. 5. & 6.

riétal. C'eſt ce qui aſſujettit encore fortement la partie inférieure de ce dernier os.

Ce n'eſt pas ſeulement au bord du Coronal & des Pariétaux qu'il ſe trouve des eſpeces d'*avances* & d'*enfoncemens*, ou de la Table interne ou de l'externe ; la coupe de la plupart des os n'eſt pas perpendiculaire à l'os. Le bord d'un os a ſouvent deux coupes *, de ſorte qu'il s'unit avec ſon voiſin en deux differens ſens ; il le ſoutient, pour ainſi dire, & il en eſt ſoutenu. Ces coupes ſont plus ou moins obliques, par rapport au corps de l'os. La coupe de la partie ſupérieure *D F* †, du bord antérieur de chaque Pariétal qui regarde en-haut, n'eſt pas auſſi apparente que la coupe de la partie inférieure *FG* ⊥ des mêmes Pariétaux qui regarde intérieurement. Il en eſt ainſi de la double coupe du Coronal *AB*, *BC* ‡, qui s'ajuſte avec celle de chaque Pariétal. La partie ſupérieure du bord de l'os des Tempes qui s'articule avec l'os ſphénoïde regarde en dedans, & la partie inférieure du même bord regarde en bas. La partie du bord de l'os ſphénoïde qui s'articule avec l'os des Tempes a par conſéquent une double coupe, mais en ſens contraire. On n'a fait juſqu'à preſent, ce me ſemble, aucune mention de cette double coupe de la plupart des os du Crâne, ni de ſes effets, qui ſont de rendre l'union des os entre eux plus ferme & plus ſolide.

Au reſte, il faut faire remarquer que les dents de la partie inférieure du bord antérieur des Pariétaux ſont tellement diſpoſées avec les dents

* Fig. 3. 4. 5. & 6. † Fig. 6. ⊥ Fig. 5. ‡ Fig. 3. & 4.

dents du Coronal, qu'elles concourent par leur union à l'action que j'ai attribué aux Temporaux, en empêchant l'écartement en dehors de la partie inférieure des Pariétaux.

IV.

On ne connoit d'autre union entre les differens os du Crâne, que celle qui se fait par la differente disposition de leurs bords. On regarde tous les os du Crâne comme des pieces qui ne sont unies entre elles, que parce que leurs bords differemment configurés s'ajustent les uns avec les autres. On sait que la plupart de ces pieces se soudent ensemble peu à peu dans la vieillesse; mais ce qu'on ne sait point, c'est que toutes ces pieces dans tous les âges n'en sont véritablement qu'une seule; qu'elles ne sont pas seulement appliquées les unes contre les autres, & que dans tout le Crâne, dès le moment de sa formation, il n'y a pas une seule interruption de continuité.

Pour s'assurer de cette vérité qui en a d'abord si peu les apparences, il faut avec soin enlever le Péricrane dessus une suture, on apperçoit alors la continuité d'un os avec son voisin par le moyen d'une membrane qui est placée entre deux, & qui fait partie de l'une & de l'autre. On remarque des filets membraneux qui sortant du fond des échancrûres, s'implantent dans les dents de l'os opposé, & qui lorsqu'on remue en differens sens un des os qui forme la suture, s'étendent & se relâchent. Après avoir détaché exactement la Dure-mere, on apperçoit la même chose au de-

dedans du Crâne. Tout cela ſe remarque très bien dans la Tête d'un Enfant mort d'Hydrocephale.

Cela ſe concevra ſans peine, ſi l'on fait attention à la maniere dont ſe forment les differens os du Crâne. Le Crâne dans un Fœtus peu avancé n'eſt qu'une membrane qui ſe métamorphoſe inſenſiblement en os. Un endroit de cette membrane commence peu à peu à s'oſſifier; cette oſſification gagne & ſe continue par des lignes qui partent comme d'un centre de l'endroit où l'oſſification a commencé. Dans differens endroits de cette calotte membraneuſe, commencent en même tems d'autres oſſifications, qui de même font du progrès & s'étendent. Lorſqu'elles ſont parvenues à un certain point, le bord de chaque oſſification commence à prendre en partie la conformation que le bord de l'os doit avoir par la ſuite, & à s'ajuſter avec l'oſſification voiſine.

Au bord ſupérieur du Pariétal droit, l'oſſification ſe continue en forme de dents qui gagnent juſqu'à la partie gauche de la calotte membraneuſe. L'oſſification du Pariétal gauche ſe continue de même à ſon bord ſupérieur par des dents qui gagnent juſque du côté droit dans les intervalles membraneux, que les dents du Pariétal droit en ſe formant, laiſſent entre elles. Par-là on s'apperçoit, qu'entre les deux Pariétaux, il doit reſter une portion de membrane, qui eſt interpoſée entre le Pariétal droit & le gauche, & qui lorſqu'elle ſera oſſifiée ne ſera plus qu'un os de deux Pariétaux.

Au reſte, on ne doit pas être plus étonné de

de trouver entre les deux Pariétaux, par exemple, une portion membraneuse, que d'en trouver entre les pieces osseuses de l'Occipital d'un Fœtus. Quand on leve avec adresse dans un Enfant la Dure-mere & le Péricrane à l'endroit de la Fontanelle, ne voit-on pas une membrane qui est continue avec les deux Pariétaux & le Coronal, laquelle fait partie de ces trois os, & qui s'ossifie avec l'âge? on n'apperçoit point d'autre difference entre ces differentes portions membraneuses, si ce n'est que les unes s'ossifient très promptement, & les autres avec plus ou moins de lenteur. Les membranes qui séparent les pieces osseuses de l'Occipital d'un Fœtus, s'ossifient peu après la naissance; celle qui se trouve à la Fontanelle disparoit, excepté à l'endroit des sutures, à trois ou quatre ans plus ou moins. Il en est de même de la membrane qui sépare en deux le Coronal, & qui cependant quelquefois subsiste jusqu'à la vieillesse. Celle qui est entre les deux Pariétaux, ainsi que celles qui sont entre les os du Crâne & de la face, s'ossifient presque toutes dans un âge avancé, les unes plutôt, les autres plus tard.

Je n'ai jamais observé cette membrane avec plus de plaisir que dans l'endroit des sutures écailleuses. On y découvre que cette membrane est composée de deux lames, de même que le Crâne est composé de deux Tables. Après avoir emporté le Péricrane de dessus la suture écailleuse du Temporal avec le Pariétal, vous voyez de la portion écailleuse de l'os temporal partir, pour ainsi dire, une membrane qui va former la Table externe du Pariétal.

En dedans du Crâne, après avoir emporté la Dure-mere, on voit une membrane continue à la Table interne du Temporal, & à la portion écailleuse du Pariétal.

Cette observation, aussi-bien que quelques autres, prouve que les portions écailleuses des os ne sont pas formées par les deux Tables.

V.

En examinant le Crâne de plusieurs Fœtus de differens âges, il m'a paru que les fibres osseuses, qui s'étendent du milieu de l'os comme d'un centre vers sa circonference, & qui étant unies ensemble par le moyen de petites fibres transverses, forment les Mailles dont parle M. Malpighi, il m'a paru, dis-je, que ces fibres sont composées de petites lames appliquées les unes sur les autres, à peu près comme les écailles des Poissons. L'existence de ces lames est prouvée, parce qu'on les apperçoit dans les Crânes qui se décomposent par une longue exposition aux injures de l'air, & dans les os qui s'exfolient; mais, comme je viens de le dire, on les peut encore observer dans les os du Crâne d'un Fœtus peu avancé, lorsqu'ils sont tout nouvellement débarrassés des autres parties, ou qu'on les a un peu laissés dans l'eau. En courbant alors legerement ces os suivant la longueur de leurs fibres, on voit ces petites lames qui se soulevent & s'écartent les unes des autres par une de leurs extrémités.

VI.

VI.

Il y a dans le Crâne des choses qui sont sensibles, qui sont de conséquence, qui ne demandent que des yeux pour être apperçues, & qui ont, je crois, échapé à tous les Anatomistes. Telle est la difference qui se trouve presque toujours entre les deux trous par par où les jugulaires communiquent avec les sinus lateraux, ainsi que entre les fosses où est logée la tête des mêmes jugulaires. Ce trou & cette fosse sont souvent du côté droit une ou deux fois plus grands que du côté gauche. Pour s'en convaincre, il n'y a qu'à jetter la vue sur plusieurs Crânes. Cette inégalité dans les trous & les fosses des deux jugulaires internes est une suite d'une observation qu'a fait M. Morgagni sur un Sujet *, & qui m'a paru constante; c'est que le sinus lateral droit est plus large, & contient plus de sang, que le gauche; ainsi le sang du sinus lateral droit, pour entrer dans la jugulaire droite, a dû se conserver un passage plus grand dans le Crâne que celui du gauche. L'inégale quantité du sang dans les deux sinus lateraux, vient de ce que le sinus longitudinal supérieur, comme l'a entrevu M. Vieussens, & comme le trajet de ce sinus, qui est gravé sur les os, le fait appercevoir même dans les Crânes décharnés, ne se divise pas également dans les deux sinus lateraux. Ce si-

* *C'est dans l'explication de la premiere Figure de la premiere Planche de ses sixiemes Adversaires.*

finus décharge le fang qu'il contient dans le finus lateral droit, ainfi que l'a parfaitement bien dévelopé * l'illuftre M. Morgagni, & le gauche n'en reçoit qu'une médiocre quantité par une, ou deux, ou quelquefois trois petites communications qu'il a ordinairement avec le droit.

Comme il fe trouve dans quelques Sujets que le finus longitudinal fupérieur fe décharge également dans les deux finus lateraux; alors le diametre des jugulaires & des trous par où elles prennent naiffance eft égal du côté droit & du côté gauche. Quand le finus longitudinal fe détourne dans le finus lateral gauche, comme il arrive très rarement, puifque dix Sujets ouverts exprès n'en ont fourni à M. Morgagni qu'un feul exemple, c'eft du côté gauche que le finus, la jugulaire, la foffe & le trou font plus grands.

Cette difference entre ces parties du côté droit & du gauche, avec quelques autres raifons, m'ont fait dire, il y a longtems, qu'il y a de la difference entre la faignée qu'on fait à la jugulaire droite, & celle qu'on fait à la gauche.

VII.

Je crois qu'on peut retrancher du nombre des os qu'on compte ordinairement dans la Tête, les deux cornets inférieurs ou les lames fpongieufes inférieures du nez. Il m'a fouvent paru que ce ne font point des os par-

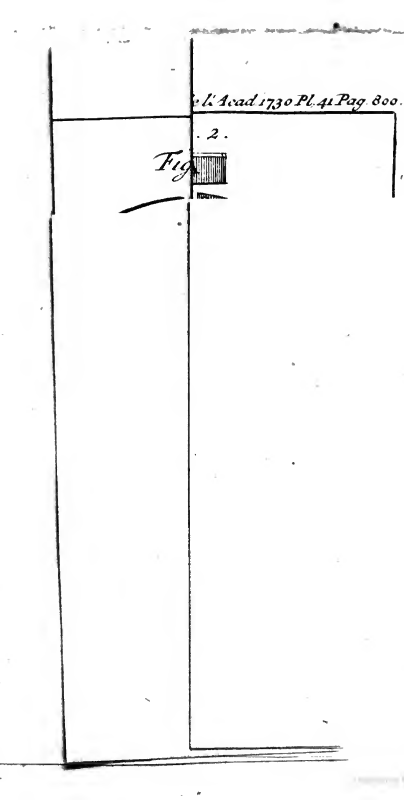
* *Adverfaire IV. animadverf.* 1.

particuliers, mais des portions de l'os ethmoïde. Je les ai vu attachés à l'os ethmoïde dans des Têtes de differens âges, chacun par une lame dont la figure est souvent differente, & qui quelquefois est percée. Ces lames descendent de devant en arriere, & vont de la partie antérieure laterale de l'os ethmoïde au bord supérieur des cornets inférieurs. J'ai des os ethmoïdes séparés du reste de la Tête, auxquels les cornets inférieurs sont restés attachés. Comme les lames osseuses qui font cette union sont très minces & très fragiles, on les casse presque toujours, & d'autant plus facilement qu'ils sont retenus avec l'os maxillaire par leur apophyse en forme d'oreille qui est engagée dans le sinus maxillaire. Les cornets inférieurs se soudent avec l'os du Palais, & ensuite avec l'os maxillaire, mais cette union ne les doit pas faire regarder comme faisant partie de l'un ou de l'autre de ces os. Presque tous les os qui se touchent, s'unissent & se soudent ensemble avec l'âge, les uns plutôt, les autres plus tard. Une piece osseuse peut être regardée comme un os particulier, lorsque dans l'âge où les os sont bien formés, on ne trouve point entre elles & les pieces voisines une continuité non interrompue d'ossification.

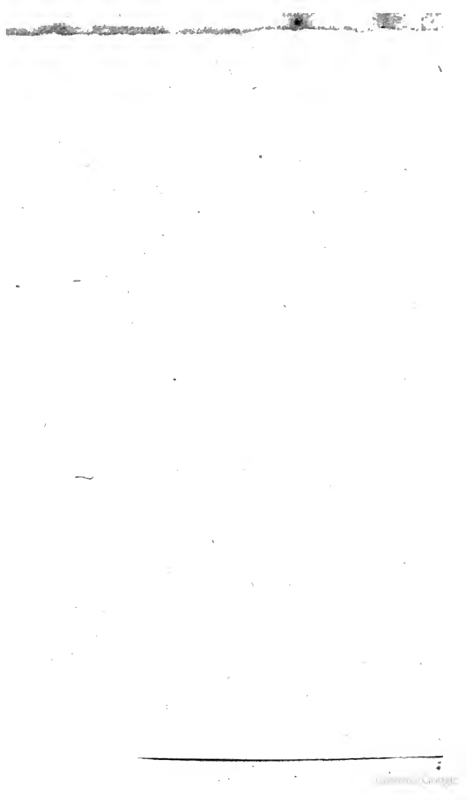
Pour avoir un os ethmoïde auquel les cornets inférieurs restent attachés, je choisis une Tête où ces cornets ne soient point encore soudés avec les os du Palais & les os maxillaires. J'ouvre le sinus maxillaire par sa partie externe, je détruis le bord de l'os maxillaire sur lequel l'oreille du cornet inférieur

eſt appliquée. Pour ne point en même tems détacher le cornet de l'os ethmoïde, il faut un peu d'adreſſe & de patience, & avec cela ne réuſſit-on pas toujours. L'oreille du cornet étant ainſi dégagée, on ôte l'os maxillaire que ſuit ordinairement l'os du Palais, & le cornet reſte attaché à l'os éthmoïde.

Au reſte, il n'eſt pas beſoin de cette préparation, ſi l'on veut ſeulement s'aſſurer de la continuité des lames ſpongieuſes inférieures avec l'os ethmoïde; il ne faut que conſulter des Têtes où il n'y a rien de détruit, on verra preſque toujours que du bord ſupérieur de chaque cornet inférieur s'éleve une lame qui va s'attacher à l'os ethmoïde; & lorſque les cornets inférieurs ſont ſéparés de l'os ethmoïde, on apperçoit ſur leur bord ſupérieur de petites éminences oſſeuſes qui ne paroiſſent être que les reſtes de la lame rompue.



l'Acad. 1730 Pl. 41 Pag. 800.
. 2.
Fig



REMARQUES

Sur un Ecrit de M. Davall, *qui se trouve dans les Transactions Philosophiques de la Societé Royale de* Londres, N°. 402, *an.* 1728 *: touchant la comparaison qu'a fait M.* Delisle, *de la grandeur de* Paris *avec celle de* Londres, *dans les Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, année* 1725, *page* 68.

Par M. DE MAIRAN.

UN des principaux motifs de feu M. *Delisle* dans ce qu'il nous a laissé sur l'étendue des grandes Villes, étoit de concilier ou d'éclaircir quelques Observations Astronomiques, dont le résultat pouvoit devenir assez different, par la difference des lieux où elles auroient été faites, quoique dans l'enceinte d'une même Ville. C'est ce dont il nous avertit dès le commencement de cette recherche, de l'utilité de laquelle il donne des preuves & des exemples. Après cela, M. *Delisle* compare entre elles quelques-unes des Villes, tant anciennes que modernes, dont la grandeur nous est connue, soit par observation, soit par le témoignage des Auteurs qui en ont parlé, telles qu'*Alexandrie*, *Rome*, *Babylone*, *Bysance*, *Ispahan*, *le Caire*, *Londres*, &c. *Paris* qui nous interesse plus qu'aucune autre Ville du monde, lui sert de base & de terme de comparaison, par rapport aux autres, & sur-tout par rapport à la Ville de *Londres*; il

l fait, comme on le fait, celle-ci plus petite que *Paris*, tout au moins d'une vingtieme partie. C'eſt ſur le Plan de *Morden*, qu'il s'eſt règlé, & plus encore ſur des dimenſions très exactes qu'il avoit reçu de *Londres* même. Cette fameuſe Ville nous fournit tous les jours de bien plus dignes ſujets d'émulation que celui que pourroit faire naitre l'étendue de ſes murailles: elle n'a pas dédaigné cependant ce leger avantage, & elle a trouvé dans la *Societé Royale* qu'elle renferme, & en la perſonne de M. *Davall*, un défenſeur contre la déciſion de M. *Deliſle*. Selon M. *Davall*, non ſeulement ce vingtieme de plus attribué à l'étendue de *Paris* s'évanouït, mais il ſuit du calcul même de M. *Deliſle* & d'une erreur de fait où il paroît être tombé, que *Londres* doit être plus grand que *Paris*, d'environ la quatorzieme partie.

On ne peut diſconvenir que M. *Deliſle* ne ſe ſoit mépris, en énonçant la méthode qu'il a ſuivie pour dreſſer ſon Plan de *Paris*, & pour faire la comparaiſon de cette Ville avec celle de *Londres*; mais après avoir examiné ſon Mémoire, & le Plan dont il s'agit, il me paroît évident que ſa mépriſe ne tombe que ſur ſon énoncé, & non ſur ſes opérations, ou ſur les conſéquences qu'il en a tirées; & partant que la concluſion de M. *Davall*, en ce qu'elle a de favorable à l'étendue de *Londres*, ne ſuit nullement de l'erreur qu'il a reprochée à M. *Deliſle*. C'eſt-là tout ce que je me propoſe de prouver dans ces Remarques. Outre que l'on ſera peut-être curieux de ſavoir ſur quoi roule la difficulté, il m'a ſemblé que nous ne pouvions refuſer un tel éclair-

éclairciſſement à la mémoire du ſavant Géographe que cette queſtion intereſſe.

M. *Deliſle*, après avoir donné le détail de la méthode qu'il avoit ſuivie pour tracer le Plan de Paris qu'il publia en 1716, & qui eſt le même dont il s'eſt ſervi pour déterminer la grandeur de cette Ville, méthode toute géométrique, & bien differente en cela de la plupart de celles qu'on avoit employé juſqu'alors, ajoute qu'il en lia les parties ou les triangles avec les Obſervations exactes de Mrs. de l'Obſervatoire pour la deſcription de la Méridienne de France. „ Il n'oublia pas „ de tracer cette Méridienne à travers la „ Ville, ce qui le mit en état, dit-il, après „ les précautions rapportées ci-deſſus, de di„ viſer l'étendue de la Ville par Méridiens „ & Paralleles, comme on fait ſur une Car„ te générale, ce qui ſert à indiquer à quel„ le portion du Ciel les differentes parties „ de cette Ville répondent.

Juſques-là M. *Deliſle* rapporte fidelement ce qu'il a fait en traçant ſa Carte de *Paris*, & cette Carte en eſt la preuve.

Mais voici où ſa mémoire ne l'a pas ſervi de même, comme le prouve encore la même Carte.

„ J'y ai tracé les Paralleles de 15 en 15 ſe„ condes, & les Méridiens de 20 en 20 ſe„ condes; & comme ſous le Parallele de *Pa*„ *ris* 15 degrés de Latitude en valent 20 de „ Longitude, & qu'il en eſt ainſi des minu„ tes & des ſecondes, en donnant 5 minu„ tes de plus à l'intervalle des Méridiens qu'à

„ celui des Paralleles, je me suis fait des
„ Quarrés parfaits.

Ce qu'il y a de faux dans cet énoncé, c'est que sous le Parallele de *Paris* 15 degrés de Latitude ne vaillent que 20 degrés de Longitude; ils en valent près de 23: c'est ainsi que le donne la *Règle* si connue, du Sinus du complément de Latitude, &c. Mais il y a grande apparence que M. *Delisle*, au-lieu du complément, aura pris ici la Latitude même, qui à l'égard de *Paris*, étant introduite dans l'Analogie au-lieu de son complément, répondroit en effet à environ 20 degrés ou 19 $\frac{11}{12}$ de Longitude pour 15 de Latitude. Il ne faut pour cela qu'avoir regardé à droite à l'ouverture des Tables des Sinus, au-lieu de regarder à gauche. Voilà, dis-je, vraisemblablement la source de l'erreur que M. *Davall* a relevée, & qui lui a fait tirer des conclusions si favorables à l'étendue de *Londres*. Ecoutons-le lui-même: je ne saurois mieux mettre le Lecteur au fait de ce calcul, & du raisonnement qu'il fournit à M. *Davall*, qu'en rapportant ses propres paroles.

„ En lisant ce Mémoire de M. *Delisle*, dit-
„ il, après avoir transcrit l'énoncé qu'on
„ vient de voir, je me suis d'abord apperçu,
„ que la méthode qu'il a suivie pour compa-
„ rer l'étendue de *Paris* avec celle de *Londres*,
„ & par laquelle il conclud que la premiere
„ de ces deux Villes est d'un vingtieme plus
„ grande que l'autre, est fondée sur une fausse
„ hypothese; savoir, que sous le Parallele
„ de *Paris* 20 degrés de Longitude sont égaux
„ à 15 de Latitude, & par conséquent, que
„ si

„ si l'on trace les Méridiens de 20 en 20 se-
„ condes, & les Paralleles de 15 en 15, les
„ figures données par leurs intersections se-
„ ront des Quarrés parfaits: car l'Equateur
„ & ses Paralleles sont entre eux comme les
„ Sinus de leurs distances respectives du Po-
„ le. D'où il suit que comme le Rayon ou
„ Sinus de 90 degrés est au Sinus de la dis-
„ tance d'un Parallele quelconque du Pole,
„ ou au Sinus du complément de la Latitu-
„ de: ainsi le degré donné de l'Equateur, ou
„ d'un grand Cercle quelconque, est à la
„ portion semblable du Parallele donné. Pre-
„ nant donc la Latitude moyenne de *Paris*
„ de 48° 51', le rapport des degrés d'un
„ grand Cercle à ceux du Parallele de *Paris*
„ sera, par les Tables des Sinus, comme
„ 10000000 est à 6580326; au-lieu que selon
„ M. *Delisle* ce rapport n'étant seulement que
„ comme 20 & 15, ou comme 100 & 75, il
„ suit que les figures que M. *Delisle* appelle des
„ Quarrés, n'en sont point, mais des Rectan-
„ gles, dont le plus grand côté, qui contient
„ 15 secondes d'un grand Cercle, se trouve
„ dans la même proportion avec le plus pe-
„ tit, qui contient 20 secondes du Parallele
„ de *Paris*, que 750 &c. avec 658 &c. ou
„ à peu près comme 8 à 7; & que les inter-
„ valles qu'il devroit avoir donné en com-
„ pensation aux Méridiens pour faire de ces
„ figures des Quarrés parfaits, devroient a-
„ voir été $\frac{15 \times 100}{658}$ &c. secondes, ou appro-
„ chant de $22'' \frac{4}{5}$, ou $22''\ 48'''$ du Parallele de
„ *Paris*.

„ Or " continue M. *Davall* „ M. *Delisle* dit „ que ces figures sont des Quarrés parfaits, „ & qu'il les a calculées comme des Quar- „ rés, dont le côté étoit de 15" d'un grand „ Cercle; & selon lui, *Paris* contient 36 de „ ces Quarrés, qui font 3538647 toises quar- „ rées, lequel nombre étant divisé par 63, „ le quotient 56196 sera le nombre de toises „ quarrées contenues dans chaque Quarré, „ dont la racine donne 237 toises pour le „ côté de chacun d'eux, ce qui fait tout „ juste 16", ou $\frac{1}{225}$ de degré d'un grand Cer- „ cle.

„ M. *Delisle* a donc fait par cette suppu- „ tation" conclud M. *Davall* „ la superficie „ de chaque Rectangle *, & par conséquent „ celle de toute la Ville de *Paris*, trop gran- „ de d'environ $\frac{1}{7}$.

Tout ce raisonement se réduit, si je ne me trompe, à ceci.

1°. Que M. *Delisle* a pris ou tracé un Plan de *Paris*, tel qu'il devoit être dans toutes ses dimensions.

2°. Qu'il a divisé ce Plan par des Quarrés, au-lieu de le diviser par Rectangles.

3°. Que ces Quarrés se trouvent plus petits que n'auroient été les Rectangles; d'où il suit, que l'aire totale de *Paris* contient un plus grand nombre de ces Quarrés qu'elle n'auroit contenu de Rectangles.

4°. Que malgré le trop de petitesse de chacun de ces Quarrés, M. *Delisle* les a évalués au même nombre de toises quarrées, que ce-

* Il faut entendre *de chaque quarré*, car autrement la supputation de M. *Delisle* pourroit être juste.

celui qu'auroit contenu réellement chaque Rectangle.

D'où il suit enfin, que l'aire totale de *Paris* résultante de la somme de ces Quarrés, se trouve plus grande qu'il ne faut d'une quantité, qui a le même rapport à sa véritable aire, que celle de chaque Rectangle à chacun de ces Quarrés.

Pour répondre à l'objection, il ne s'agit que d'éclaircir, & de prouver ce que nous avons déja avancé, que l'erreur reprochée à M. *Delisle*, n'est que dans l'exposé de sa méthode, & nullement dans la méthode même, ni dans les résultats.

Car 1°. c'est sur sa Carte de *Paris* déja faite, & publiée en 1716, augmentée seulement peut-être de quelques additions pour les nouveaux bâtimens, que M. *Delisle* a calculé & déterminé l'étendue & la superficie de *Paris*, & qu'il l'a comparée avec l'étendue de *Londres*. Il n'y a qu'à lire son Mémoire pour s'en convaincre.

2°. Cette Carte de *Paris*, qui est en effet divisée par Méridiens de 20 en 20 secondes, & par Paralleles de 15 en 15, ne contient point des Quarrés parfaits résultans de l'intersection de ces deux sortes de Cercles, mais des Rectangles tels que M. *Davall* dit qu'ils doivent être, & dont le grand côté, de 15 secondes en Latitude, se trouve sur les Méridiens, & le petit qui n'est que de 20 en Longitude, sur les Paralleles. Il ne faut encore pour cela que jetter les yeux sur le Plan * de M. *Delisle*.

On

* Il se trouve avec ses autres Cartes sur une feuille de même grandeur.

On y verra que les côtés des Rectangles dont je parle, étant comparés entre eux, sont à peu près dans le rapport de 7 à 8, comme le demande M. *Davall.* Il y a plus, les secondes sont tracées & numerotées sur le bord du Plan, comme le sont les degrés sur la plupart des Cartes géographiques: savoir, les secondes en Longitude, & dont 20 forment le petit côté du Rectangle, sur les deux Paralleles qui terminent la superficie de cette Carte au Septentrion & au Midi; & les secondes en Latitude, dont 15 forment le grand côté, sur les deux Méridiens qui la terminent à l'Orient & à l'Occident; & avec une telle justesse, que si l'on porte le Compas sur un de ces Méridiens, à 15 secondes d'ouverture, & qu'on l'applique ensuite sur l'un des Paralleles gradués & divisés en secondes de Longitude, on trouvera que 15 secondes du Méridien répondent sensiblement à 22″ $\frac{4}{7}$ du Parallele. Ce qui est, comme l'on a vu, la proportion réciproque que M. *Davall* leur donne.

Donc M. *Delisle* a calculé l'étendue de *Paris* sur de pareils Rectangles, il l'a très bien calculée, & il n'y a point d'erreur dans son operation.

Mais, répondra-t-on, M. *Delisle* dit positivement qu'il a calculé l'étendue de *Paris* non sur des Rectangles, tels que ceux qu'on vient de décrire, mais sur des Quarrés parfaits?

Je replique, qu'il est moralement impossible que M. *Delisle* ait pratiqué dans le tems, ce que par un défaut de mémoire, & par inadvertance, il a rapporté dans la suite d'une ma-

maniere si peu fidele. Il est, dis-je, impossible qu'ayant sous ses yeux sa propre Carte, dont les principales dimensions lui étoient connues par voye géométrique, ou par des mesures immédiates, il l'ait couverte de ces prétendus Quarrés, malgré les Rectangles qu'il y voyoit, qu'il en ait déduit des résultas qui ne pouvoient manquer de la défigurer dans toutes ses parties, & qu'il ait démenti grossierement sa premiere graduation, son échelle de 500 toises, & les distances qu'il avoit déterminées par ses triangles.

Que M. *Delisle* ait appellé des Quarrés ces Rectangles mêmes de sa Carte gravée que nous avons entre les mains, c'est ce qui est encore évident par les paroles qui suivent son énoncé. *Les Quarrés chiffrés*, ajoute-t-il, *m'ont servi de renvoi à une Table alphabétique, qui fait trouver tout d'un coup la situation des rues dont on ne sait que le nom; mais ce n'étoit pas là le principal usage que j'en voulois faire. C'étoit de comparer par le moyen de ces Quarrés la grandeur de* Paris *à celle de* Londres. La Carte où les rues sont indiquées est donc la même qui a servi à comparer la grandeur de *Paris* à celle de *Londres.* Donc M. *Delisle* s'est mal expliqué seulement, quand il a appellé des Quarrés, ce qui réellement & de fait n'étoient sur sa Carte que des Rectangles.

J'avoue qu'on auroit de la peine à donner raison d'une telle méprise: mais quelque extraordinaire qu'elle paroisse, elle devient cependant moins difficile à concevoir, dès qu'on sait que M. *Delisle* n'a pu voir imprimer son Mémoire, & que par conséquent il a pu ne

le

le pas relire ou retoucher avec la nouvelle attention qu'inſpire preſque toujours, & avec raiſon, à un Auteur, l'idée de l'impreſſion.

Car M. *Deliſle* mourut le 25 Janvier 1726, comme on l'apprend dans ſon Eloge; & je puis prouver, tant par les dates qui ſont à la tête des Mémoires de 1724, & 1725, que par d'autres circonſtances, dont j'ai retenu la note, que nos premiers Mémoires de 1725, parmi leſquels ſe trouve celui de M. *Deliſle*, ne furent donnés à l'Imprimerie, tout au plutôt, que vers le commencement du mois d'Août de l'année 1726, c'eſt-à-dire, plus de 6 mois après ſa mort.

C'eſt donc un Ouvrage poſthume que le Mémoire de M. *Deliſle*; & l'on n'ignore pas quelle indulgence cette qualité doit concilier à ſon Auteur.

J'ai montré, ſi je ne me trompe, que l'inadvertance de M. *Deliſle* n'empêchoit pas qu'on n'eût tout lieu de croire ſes réſultats conformes à la vérité. Mais M. *Davall* a-t-il pu, ou dû entrer dans cette diſcuſſion; & faut-il l'accuſer de trop de ſévérité, quand il a pris pour des Quarrés, ce que M. *Deliſle* lui-même appelle des Quarrés dans ſon Mémoire? Enfin a-t-il vu la Carte de cet Auteur, ſur laquelle rouloit principalement, & la détermination qu'il fit de l'étendue de *Paris*, & la comparaiſon de cette Ville avec *Londres*? On en jugera par cette inſtance de M. *Davall* même.

„ Pour confirmer ce que je dis, & le met-
„ tre hors d'atteinte, nous avons M. *Deliſle*
„ lui-même pour témoin, qui, dans le Plan de
„ *Pa-*

„ *Paris*, qu'il a fait graver, & qu'il a publié
„ lui-même & auquel il renvoye dans ce mê-
„ me Mémoire, n'a nullement fait des Quar-
„ rés des figures ci-dessus mentionnées; mais
„ il a donné à leurs côtés entre eux le rapport
„ de 8 à 7, qui est aussi approchant de leur
„ vraye proportion qu'on puisse l'exprimer par
„ lignes dans un Plan de la grandeur de celui-ci.

Voilà, je l'avoue, ce qui me paroît difficile à concilier. Il faut que M. *Davall* ait conçu que M. *Delisle* laissant là son Plan de *Paris*, le seul cependant dont il ait fait mention dans son Mémoire, & qu'il ait jamais donné, en a tracé tout exprès un autre sans égard au premier, tout different, & même tout contraire, dans l'unique dessein de faire la comparaison de *Paris* avec *Londres*. Mais il n'y avoit, comme je l'ai déja remarqué, qu'à lire la suite de l'énoncé de M. *Delisle*, pour se convaincre que le Plan sur lequel il avoit mesuré l'étendue de *Paris*, pour la comparer à l'étendue de *Londres*, étoit celui-là même où l'on avoit vu les Rectangles.

Ce que je comprends encore plus difficilement, c'est la conclusion que tire M. *Davall* de la fausse hypothese de M. *Delisle*, en faveur de l'étendue de *Londres*. Car voici comment il raisonne:

„ Or est-il que dans le Mémoire que nous
„ venons d'examiner, M. *Delisle* avoue lui-
„ même qu'en mesurant *Londres*, il a tracé
„ des Quarrés, qui contiennent 15 secondes
„ d'un grand Cercle, & dont il dit que *Lon-*
„ *dres* contient 60. Donc, & par les raisons
„ précédentes, pour comparer *Paris* avec
„ *Lon-*

„ *Londres*, nous devons retrancher des 63
„ Rectangles que *Paris* contient, une quanti-
„ té en raiſon de 8 à 7; mais parce qu'elle
„ eſt un peu au-delà de la véritable, faiſons
„ ſeulement ce retranchement dans le rapport
„ de 9 à 8, qui eſt un peu plus petit qu'il ne
„ faut. Par-là le nombre des Quarrés conte-
„ nus dans *Paris*, & dont le côté eſt 15 ſe-
„ condes d'un grand Cercle, ſera réduit au
„ rapport de 63 à 56. Et par conſéquent, ſe-
„ lon la maniere même de meſurer de M. *De-
„ liſle*, la grandeur de *Londres* ſera à celle de
„ *Paris* comme 60 eſt à 56; ou comme 15 eſt
„ à 14, c'eſt-à-dire, que *Londres* ſera plus
„ grand que *Paris* d'un quatorzieme.

Comment conçoit-on que M. *Deliſle* meſurant l'étendue de *Londres* ſur le même pied qu'il a meſuré l'étendue de *Paris*, le rapport de grandeur entre ces deux Villes ne ſe trouve pas le même, quelle que ſoit la méthode qu'il y a employée? n'eſt-ce pas, dans le cas préſent, comme s'il s'étoit ſervi d'une toiſe de 5 pieds, au-lieu d'une toiſe de 6 pieds? Il en réſultera une ſurface abſolue plus grande ou d'un plus grand nombre de toiſes qu'il ne faut pour *Paris*, & pour *Londres*, mais les ſurfaces relatives & leurs rapports ne demeureront-ils pas les mêmes? M. *Deliſle* a dit expreſſément dans ſon Mémoire, & M. *Davall* n'a pas oublié de le rapporter, qu'*il avoit mis le Plan de* Londres *ſur la même échelle que celui de* Paris. Qu'*il y avoit tracé de même des Quarrés de* 15 *en* 15 *ſecondes d'un grand Cercle*, & *qu'alors il s'étoit trouvé en état de comparer immédiatement la grandeur de ces deux Villes*. Voilà donc une me-

mesure commune, & par conséquent un rapport de grandeur toujours le même. Mais tâchons de démêler encore, s'il est possible, les suites que peut avoir eu cette méthode, en la prenant selon la derniere rigueur.

M. *Delisle* ne parle pas de la quantité de secondes en Longitude qu'il a données à la portion des petits Cercles ou des Paralleles de *Londres*, relativement aux 15 secondes de Latitude qu'il a pris sur les Méridiens ou grands Cercles. Ce qui, en supposant toujours la fausse hypothese des Quarrés, peut être entendu de plusieurs manieres, mais dont aucune cependant ne favorise la conséquence tirée par M. *Davall.*

Supposons premierement que M. *Delisle* a attribué 20 secondes au côté du Quarré qui exprime les degrés de Longitude du Parallele de *Londres*, en donnant le même intervalle aux Méridiens du Plan de cette Ville, qu'il avoit donné à ceux du Plan de *Paris*. C'est-là tout ce qu'on peut imaginer de plus rigoureux d'après son silence là-dessus, & en vertu de l'identité de méthode & d'échelle qu'il dit avoir employées pour les deux Plans. Mais en ce cas, bien-loin que la conséquence de M. *Davall* soit juste, & que celle de M. *Delisle* soit peu favorable à l'étendue de *Londres*, il suit que *Londres* a réellement beaucoup moins de surface par rapport à *Paris*, que M. *Delisle* ne lui en avoit donné. Car *Londres* étant plus septentrional que *Paris*, d'environ 2° 40', son Parallele contiendra des degrés de Longitude plus petits, en raison des Sinus de complément des deux Latitudes, ou à peu-près

près de 17 à 18. Donc selon le calcul & le raisonnement qu'a fait M. *Davall* à l'égard de *Paris*, & qu'en rigueur on doit faire de même à l'égard de *Londres*, il faudra que 15 secondes d'un grand Cercle répondent encore à un plus grand nombre de secondes du Parallele de *Londres*, qu'elles ne faisoient à l'égard du Parallele de *Paris*. Si l'on formoit donc, comme il le demande, des Rectangles dont le côté supérieur contînt 20″, l'autre côté qui lui est perpendiculaire, & auquel il en faut donner 15 d'un grand Cercle, devroit avoir un plus grand rapport avec lui sur le Plan de *Londres*, que sur le Plan de *Paris*. Ou si enfin l'on tombe dans l'erreur de ne donner à ce second côté que la longueur de celui de 20″ du Parallele, comme on suppose qu'il avoit été pratiqué à l'égard de *Paris*, & que ces figures deviennent des Quarrés parfaits, ces Quarrés seront relativement encore plus défectueux par leur petitesse à l'égard de *Londres*, qu'ils ne l'étoient à l'égard de *Paris*. Donc la surface de *Londres* en contiendra un plus grand nombre qu'elle n'auroit contenu de Rectangles; donc si l'on évalue la surface de chacun de ces Quarrés en toises quarrées, sur le même pied que les Rectangles, & comme s'ils n'étoient pas défectueux, & que de leur somme on en déduise la surface totale de la Ville de *Londres*, cette surface paroîtra plus grande qu'elle n'est réellement, & plus encore que n'avoit paru celle de *Paris*; en raison inverse des Sinus du complément de Latitude de ces deux Villes, c'est-à-dire, comme 18 est à 17. Donc l'erreur de M. *Delisle* doit

avoir

avoir plus influé sur l'étendue de la Ville de *Londres* en excès, qu'elle n'avoit fait sur l'étendue de la Ville de *Paris*, d'environ $\frac{1}{17}$. Nous évaluons toujours ici les degrés des Paralleles, de même que ci-dessus, sur l'hypothese de la Terre sphérique, & non sur le pied de celle du sphéroïde oblong, ou applati.

Secondement, si l'on veut que M. *Delisle*, ayant eu égard à la Latitude de *Londres*, ait transporté sur les Quarrés qui résultent de l'intersection des Méridiens, & des Paralleles tracés sur le Plan de cette Ville, une erreur proportionnelle à celle qui lui est reprochée touchant la dimension de *Paris*; (car enfin il ne seroit pas raisonnable de penser que M. *Delisle* ne savoit pas que la Latitude de ces deux Villes est differente, & que *Londres* étant plus éloigné de l'Equateur que *Paris*, les degrés de Longitude de son Parallele, devoient être en moindre raison avec ceux de l'Equateur, & qu'il en falloit un plus grand nombre pour égaler la longueur de 15 degrés d'un grand cercle; & il n'y a point d'équivoque qui puisse l'avoir fait tomber dans cette méprise:) si l'on fait, dis-je, cette supposition, le rapport conclu par M. *Delisle* demeure dans son entier, & il faut dire avec lui, que *Paris* est plus grand que *Londres* d'un vingtieme, sans y comprendre les Jardins considerables & les grands Enclos de ces deux Villes, ou d'un sixieme, en y comprenant les grands Jardins, & les grands Enclos.

Que faudroit-il donc pour conclurre de l'énoncé, & de la méthode de M. *Delisle*, que *Londres* est plus grand que *Paris* d'une quatorzieme

zieme partie ? rien de moins que de faire opérer ce savant Géographe d'une maniere toute differente de celle qu'il dit qu'il a fait, & la plus extravagante du monde. Il faudroit lui faire diviser le Plan de *Londres* en Rectangles convenables, tandis qu'il n'auroit divisé le Plan de *Paris* qu'en Quarrés défectueux; ou, si l'on veut qu'il ait divisé le Plan de *Londres* en des Quarrés, dont l'un des côtés pris sur un grand Cercle ou sur le Méridien, soit, comme il dit, de 15", il faut que l'autre côté, qui fait partie du Parallele, réponde nécessairement, & quoi qu'ait voulu faire M. *Delisle*, au nombre de secondes en Longitude que doit comporter ce Parallele, savoir à environ 24" 6"'. Car par ce moyen chaque partie de la surface de *Londres* contenant un plus petit nombre de ses Quarrés, que pareille portion de la surface de *Paris* ne contient des siens, & attribuant à chaque espece de Quarré la même aire, & le même nombre de toises, il sera possible que *Londres* paroisse être plus petit que *Paris*, quoique réellement plus grand. En un mot, il faut faire opérer M. *Delisle* sur son Plan de *Paris*, dont la seule inspection devoit le redresser, de la maniere la plus inusitée, & la plus fautive, & lui faire ensuite mesurer l'étendue de *Londres*, selon toutes les règles de l'Art. C'est-là aussi sans doute ce qu'a prétendu M. *Davall*; puisque, comme on a vu, des 63 Quarrés que M. *Delisle* donne à l'étendue de *Paris*, il en retranche 7, & les réduit à 56, & qu'il n'ôte rien des 60 Quarrés que le même M. *Delisle* donne à l'étendue de *Londres*. Je laisse à penser

aux personnes équitables, & à M. *Davall* lui-même, quand il voudra bien y faire attention, s'il est possible d'imaginer rien de pareil.

Après tout ce qui a été remarqué ci-dessus, & que je crois suffisant pour justifier les calculs & les conclusions de M. *Delisle*, je ne saurois rien ajouter de plus fort, sinon que j'ai vu les Plans de *Paris*, & de *Londres*, ou les deux feuilles mêmes sur lesquelles il avoit établi ses dimensions & son calcul, & qu'en ayant examiné toutes les parties, je n'y ai rien trouvé qui ne soit entierement conforme à ce que je viens de dire. La feuille de *Paris* ne consiste que dans le Plan même gravé en 1716, dont nous avons parlé, augmenté seulement à la main de quelques nouveaux bâtimens considèrables qui avoient été faits depuis; & celle de *Londres* est, comme il a été dit, la Carte de *Morden* rectifiée ou augmentée de même sur les nouvelles dimensions que M. *Delisle* avoit reçues. Nulle division par Quarrés, & par-tout, dans l'une & dans l'autre, des Rectangles relatifs à la Latitude du lieu. C'est M. *Buach*, de cette Académie, digne disciple de feu M. *Delisle*, & ensuite son gendre, & l'héritier de ses Papiers, qui a bien voulu me communiquer ces deux Plans. J'ai prévenu en quelque façon la recherche qu'il méditoit là-dessus, par la commodité que j'ai eu de voir avant lui l'Ecrit de M. *Davall*, & par l'engagement où je me suis trouvé d'en dire mon sentiment, à l'occasion d'une dispute qui s'étoit mue sur ce sujet. Mais le Public n'y perdra rien, si M. *Buach* se détermine, comme il le fait esperer,

à mesurer lui-même, tant sur les Mémoires de M. *Delisle*, que sur de nouvelles pieces, l'étendue de *Paris* & de *Londres*, & à justifier par-là d'une maniere encore plus directe & plus détaillée que je n'ai fait, le fameux Géographe que tout le monde savant regrette, en demeurant riche du fruit de ses travaux.

OBSERVATIONS METEOROLOGIQUES FAITES PENDANT L'ANNÉE M. DCCXXX.

Par M. MARALDI.

ON a vu plusieurs fois pendant l'année 1730, l'Aurore Boréale, mais elle n'a été éclatante & sensible que le 9 d'Octobre qu'on l'a vue à 8h du soir, élevée sur l'horizon de 15 à 20 degrés vers le Nord-ouest, partagée en deux Colomnes lumineuses, inclinées à l'horizon, de maniere que la partie supérieure de ces Colomnes regardoit l'Orient, & la partie inférieure le Nord. Il y avoit entre ces Colomnes un espace serein, sans Lumiere, où étoient les Pleïades. Ces deux Colomnes occupoient chacune 16 à 18 degrés de longueur sur 5 à 6 de largeur; le reste du Ciel étoit fort serein, & on distinguoit plusieurs Etoiles du Taureau & de Persée, au travers même des Colomnes lumineuses.

Celle

Celle qui étoit à droite des Pleïades, c'est-à-dire, plus vers l'Orient, commença à diminuer à $8^h\ 25'$, pendant que celle qui étoit à gauche augmentoit de grandeur, jusqu'à ce que l'autre fût entierement cessée. Elle s'éleva ensuite, & à $8^h\ \frac{3}{4}$ elle étoit entre les Pleïades & les Étoiles de Persée. Elle diminua ensuite, & cessa entierement de paroitre un peu après 9 heures.

Observations de la Pluye tombée à l'Observatoire pendant l'année 1730.

	pouc.	lign.		pouc.	lign.
En Janvier....	0	$0\frac{4}{6}$	En Juillet.....	2	$1\frac{3}{6}$
Fevrier...	1	4	Août......	0	$8\frac{3}{6}$
Mars	1	$5\frac{1}{6}$	Septembre.	1	$3\frac{1}{6}$
Avril.....	1	6	Octobre...	1	$9\frac{2}{6}$
Mai.......	1	$3\frac{2}{6}$	Novembre.	1	$1\frac{2}{6}$
Juin	2	$6\frac{1}{6}$	Décembre.	0	$11\frac{1}{6}$
	8	$1\frac{4}{6}$		7	$10\frac{3}{6}$

Donc la hauteur de la Pluye qui est tombée pendant toute l'année 1730 est de 16 pouces & $\frac{1}{3}$ de ligne, qui est moindre de la hauteur des années moyennes établie l'année 1726 par M. Maraldi, de 17 pouces $\frac{1}{2}$. La hauteur des six premiers mois est de 8 pouc. 1 ligne & $\frac{2}{3}$, & celle des six derniers est de 7 pouc. 10 lign. & $\frac{1}{2}$, avec la seule difference de 3 lignes.

La Pluye a été plus abondante dans le mois de Juin & celui de Juillet, qu'en aucun autre mois de l'année.

Il y a eu pendant le mois de Juillet de grands Vents de Sud-ouest qui ont causé plusieurs orages; le 4 de ce mois, à 3 heures après

midi, il tomba une grande quantité de Grêle, dont les grains étoient fort gros.

Observations sur le Thermometre.

Le plus grand froid marqué par le Thermometre est arrivé le 20 & le 27 de Janvier: la liqueur descendit le 20 à 24 degrés, & le 27 elle a été à 23 degrés, ce qui marque un froid moderé, puisque l'année 1709 elle descendit à 5 degrés.

La chaleur de l'Eté a été aussi moderée, car la liqueur du même Thermometre a toujours été pendant les mois de Juin & Juillet au-dessous de 60 degrés, & elle n'est montée qu'à 62 degrés le 4 & le 5 d'Août au lever du Soleil, le tems étant serein & tranquille. Le 4 de ce mois, à 3 heures après midi, la liqueur étoit à 74 degrés; mais le 5, à la même heure, s'étant levé un vent de Sud-ouest, elle monta à 76 degrés. Dans les plus grandes chaleurs des années précédentes, elle est montée jusqu'à 82 degrés.

Sur le Barometre.

On a observé la moindre hauteur du Barometre de 27 pouces 2 lignes, le 9, le 10 & le 11 de Mars, le Ciel étant couvert, avec un petit vent de Sud-ouest. La plus grande hauteur a été observée de 28 pouces 5 lignes le 22 de Janvier, par un tems serein & un vent de Nord. Le 23, le 25, & le 26 de Novembre, il a été à 28 pouces 4 lignes.

Sur la Déclinaison de l'Aimant.

Le 20 Novembre on a observé avec une Aiguille de 4 pouces la déclinaison de l'Aimant de 14° 25' vers le Nord-ouest.

MES-

MESSIEURS DE LA SOCIETÉ Royale des Sciences, établie à Montpellier, ont envoyé à l'Académie l'Ouvrage qui suit, pour entretenir l'union intime qui doit être entre elles; comme ne faisant qu'un seul Corps, aux termes des Statuts accordés par le Roi au mois de Fevrier 1706.

PHASEOLUS PEREGRINUS, flore roseo, semine tomentoso.

Phaseolus Indicus, hederæ folio angulofo, femine oblongo, lanuginofo. *Raii Hist. 3. tom.* 438.

Par M. NISSOLE.

APRÈS avoir femé quelques Graines mêlées, que j'avois reçues de Hollande, j'eus le plaifir de voir lever plufieurs Plantes curieufes, parmi lefquelles je trouvai,

Premierement, cette efpece de Haricot, qu'il me fut impoffible de ranger fous aucune des efpeces de ceux qui ont été décrits par les Auteurs de Botanique que j'ai lus, & c'eft ce qui m'a déterminé à en donner la defcription & la figure.

Sa racine eft longue d'environ un pied fur trois ou quatre lignes d'épaiffeur au colet, blanche en dedans, & couverte en dehors d'une pellicule qui eft ordinairement grisâtre, mais qui fe trouve quelquefois de couleur

 brune

brune tirant ſur le rougeâtre, de ſorte qu'il y a beaucoup d'apparence qu'elle ſe charge toujours de la couleur de la terre qu'elle occupe.

A deux pouces au-deſſous du collet, elle eſt garnie de quelques fibres d'un demi-pied de long ſur deux lignes d'épaiſſeur à leur naiſſance, entremêlées en quelques endroits de quelque peu de chevelu. Toutes ces fibres, auſſi-bien que le corps de la racine qui les fournit, diminuent conſiderablement de groſſeur à meſure qu'elles s'étendent & s'enfoncent dans la terre, deſorte qu'elles ſont très déliées à leur extrémité.

Il s'éleve de cette racine une tige de ſept à huit pieds de hauteur ſur deux lignes de groſſeur à ſa naiſſance, qui à un pouce au-deſſus de la terre ſe diviſe en pluſieurs branches qui ſont de differentes longueurs, ſouples & pliantes, & qui, comme celles des autres eſpeces de Haricot, s'entortillent aux Plantes voiſines, ou aux échalas qu'on leur a préparés pour les ſoutenir. Toutes ces tiges ſont couvertes d'une petite pellicule d'un verd-brun, lorſque la Plante eſt encore jeune, mais qui dans la ſuite devient rougeâtre, & garnie de petits poils blancs fort déliés.

Les feuilles qui garniſſent ces tiges y ſont attachées alternativement ſur des queues d'environ un pouce de long, qui fourniſſent ſur le dos de chacune, trois petits filets qui diſparoiſſent à leur extrémité. Ces feuilles ſont fort irrégulieres, d'un verd-mat, & diſpoſées toujours trois à trois ſur la même queue. Les plus grandes & les plus régulieres ont environ

ron un pouce & demi de long ſur un pouce de large, elles ſont arrondies à leur baſe, & s'élargiſſent inſenſiblement juſque vers le milieu, & diminuant enſuite peu à peu ſe terminent en pointe, de ſorte qu'elles repréſentent aſſez bien un fer de pique. Il s'en trouve quelques-unes qui ſont découpées en trefle, & il y en a d'autres qui ont des découpures ſi differentes & ſi bizarres, que j'aurois été bien embarraſſé à les décrire.

Les fleurs, qui ſont légumineuſes, de couleur de roſe pâle, naiſſent aux aiſſelles des feuilles, elles ſont ſoutenues par des queues d'environ trois pouces de long. Il s'en trouve ordinairement quatre ou cinq ſur la même queue. L'extrémité de l'étendart ou feuille ſupérieure eſt recourbé, & d'une couleur un peu plus foncée que celle des autres parties de la fleur, car elle tire ſur le rouge-brun.

Lorſque ces fleurs commencent à ſe faner, elles blanchiſſent inſenſiblement, & deviennent enfin jaunâtres, elles tombent enſuite, & l'on voit alors ſortir du fond des calices qui ſoutenoient les fleurs, les piſtiles qui deviennent des gouſſes preſque rondes d'environ deux pouces & demi de longueur, ſur trois ou quatre lignes de groſſeur. Ces gouſſes ſont compoſées de deux coſſes tannées, blanchâtres & luiſantes en dedans, qui renferment ſix ou ſept ſemences de figure preſque cylindrique, longues d'environ quatre lignes ſur une & demie de diametre; elles ſont noirâtres & couvertes d'un petit duvet blanc. Elles ſont attachées aux côtés par un petit filet blanc, bordé de noir, d'envi-

ron

ron deux lignes de long, y en ayant, au côté qui lui eſt oppoſé, un noir de la même grandeur.

Dès que j'eus examiné la Plante qui ſuit, je trouvai qu'elle avoit beaucoup de rapport avec le *Luffa Arabum*; de ſorte que je fus dans l'obligation de la ranger à la claſſe que M. Tournefort avoit déja établi dans les Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, c'eſt pourquoi je la nommai

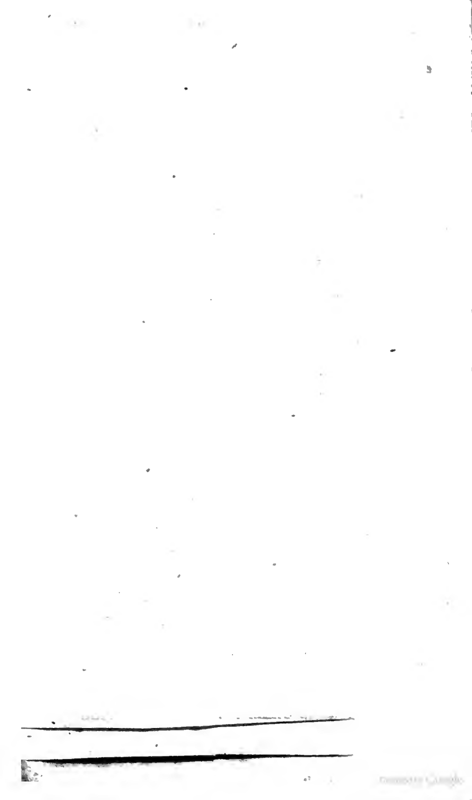
Luffa Arabum fructu echinato, fructus Momordicæ vulgaris facie.

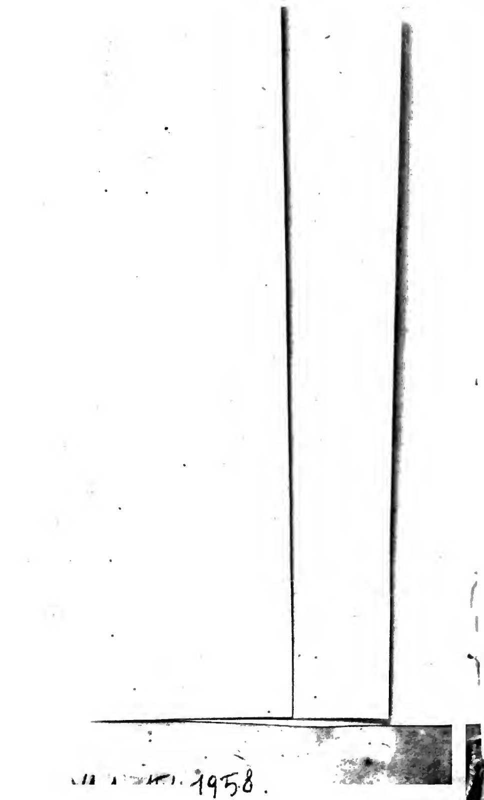
Mais j'appris dans la ſuite qu'elle avoit été nommée par M. Caſpard Commelin, & qu'il en avoit donné la deſcription & la figure dans le Catalogue des Plantes étrangeres, imprimé in 4°. à Leyden, ſous le nom de

Momordica Americana fructu reticulato ſicco.

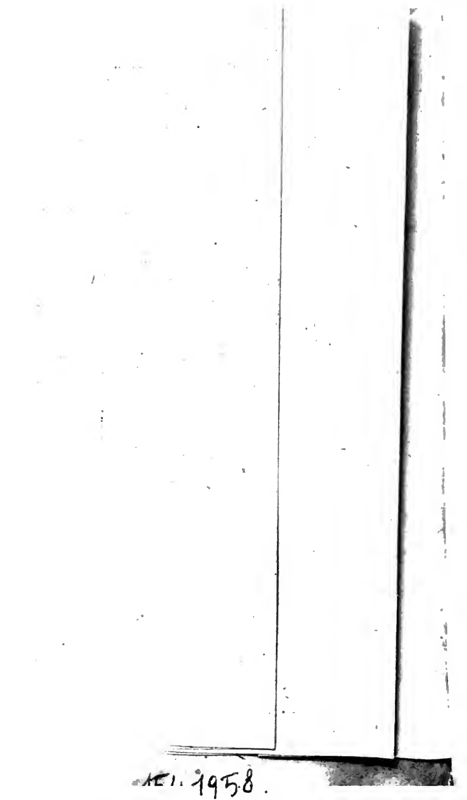
Cependant ſi on y fait attention, & qu'on examine ſérieuſement les fruits du *Momordica vulgaris*, qui ſont charnus & humides en dedans, & couverts d'une petite pellicule rouge, avec cette difference que ceux du *Luffa* ſont entierement ſecs & arides, & dans leſquels on ne trouve que quelques filamens qui renferment quelques fruits noirâtres, on pourra voir facilement la difference de ces differentes eſpeces de Plantes.

F I N.




1958.




1958.





